УДК 629.7

ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОЛНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУР ВПЛОТЬ ДО КОНЦОВ РЕГЕНЕРАТОРА С ВЫСОКОТЕПЛОПРОВОДНОЙ НАСАДКОЙ С ПРОИЗВОЛЬНО РАСПРЕДЕЛЁННОЙ НАЧАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ (ЗАДАЧА АНЦЕЛИУСА—НУССЕЛЬТА) И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

И. Е. Лобанов

Московский Авиационный институт, г. Москва, Россия

1. Исходная система дифференциальных уравнений в частных производных

Распределение температур в регенераторе, согласно работе [3], описываются системой следующих дифференциальных уравнений для плоских элементов насадки:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial f}\right)_t = \dfrac{\bar{\alpha}}{C}\left(\Theta_m - \vartheta\right); \\ \left(\dfrac{\partial \Theta_m}{\partial t}\right)_f = \dfrac{2\bar{\alpha}}{\rho c \delta}\left(\vartheta - \Theta_m\right), \end{cases} \tag{1}$$

где t — время; f — поверхность нагрева насадки между местом входа теплоносителя и рассматриваемым поперечным сечением; δ — толщина плоского элемента насадки; ϑ — температура теплоносителя; Θ_m — средняя по поперечной координате температура насадки в рассматриваемом поперечном сечении к моменту t; C — полная теплоёмкость массового расхода теплоносителя; $\bar{\alpha}$ — коэффициент теплоотдачи, отнесённый к средней температуре насадки Θ_m.

Та же самая система уравнений в частных производных для насадки из элементов произвольной формы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial f}\right)_t = \dfrac{\bar{\alpha}}{C}\left(\Theta_m - \vartheta\right); \\ \left(\dfrac{\partial \Theta_m}{\partial t}\right)_f = \dfrac{\bar{\alpha}\, df}{d C_S}\left(\vartheta - \Theta_m\right), \end{cases} \tag{2}$$

где df и dC_S — поверхность и теплоёмкость элементарного элемента насадки соответственно.

Для упрощения математической записи в дальнейшем будет опускать индекс m в Θ_m, что обычно делалось в классических работах [1—6, 8]. Однако, следует всегда иметь в виду, что символ представляет собой действительную температуру только для металлических насадок из тонкого листа, а в общем случае Θ — средняя по поперечной координате температура насадки в рассматриваемом сечении регенератора.

При данной постановке задачи теплофизические свойства и коэффициенты теплоотдачи не зависят от температуры, поэтому, для приведения системы уравнения к более удобной для решения форме, введём две безразмерные переменные ξ и η согласно следующим определяющим уравнениям для плоских элементов насадки:

$$d\xi = \frac{\bar{\alpha}}{C} df \; ; \tag{3}$$

$$d\eta = \frac{2\bar{\alpha}}{\rho c \delta} dt \; ; \tag{4}$$

для насадки из элементов произвольной формы:

$$d\eta = \frac{\bar{\alpha} df}{dC_S} dt = \frac{\bar{\alpha} F}{C_S} dt \; , \tag{5}$$

где F — полная площадь нагрева; C_S — теплоёмкость насадки регенератора.

Поскольку $\bar{\alpha}, C, \rho c \delta$ постоянны, то можно также записать для плоских элементов насадки:

$$\xi = \frac{\bar{\alpha}}{C} f \; ; \tag{6}$$

$$\eta = \frac{2\bar{\alpha}}{\rho c \delta} t \; ; \tag{7}$$

для насадки из элементов произвольной формы:

$$\eta = \frac{\bar{\alpha} df}{dC_S} t = \frac{\bar{\alpha} F}{C_S} t. \tag{8}$$

Переменная ξ называется приведённой продольной координатой, потому что неё в качестве продольной координаты входит поверхность нагрева f, а переменная η — приведённым временем, поскольку в неё входит время.

Учитывая вышеизложенное, система уравнений в частных производных в приведённых координатах для детерминирования температур в регенераторе примет следующий вид:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)_{\eta} = \Theta - \vartheta \; ; \\ \left(\dfrac{\partial \Theta}{\partial \eta}\right)_{\xi} = \vartheta - \Theta \; . \end{cases} \tag{9}$$

Следовательно, благодаря вышеизложенному преобразованию, в систему дифференциальных уравнений в частных производных кроме неизвестных величин ϑ и Θ

входят две независимые переменные (вместо 7: $\bar{\alpha}C$, ρc, δf, t).

В дальнейшем в рамках данное исследование будет посвящено получению точных решений именно этой системы дифференциальных уравнений в частных производных, далее называемой исходной, детерминирующей полное распределение температур в регенераторе.

2. Точное аналитическое решение задачи о полном распределении температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой с одинаково распределённой начальной температурой (Θ_1=0 при η=0)

Решение системы уравнений в частных производных в квадратурах было впервые получено Анцелиусом [1] и независимо от него Нуссельтом [2]. В несколько видоизмененной, не меняя существа дела, форме оно приводится в монографии [3].

Вышеуказанное решение так же можно получить с помощью преобразования Лапласа по методике, изложенной [4—6].

Постановка задачи выглядит следующим образом.

В начальный момент времени при $\eta = 0$ насадки имеет всюду одинаковую температуру Θ_1=const; начиная с этого момента теплоноситель входит в регенератор в сечении $\xi = 0$ с неизменной во времени температурой $\vartheta = \vartheta_1$ и движется через регенератор в положительном направлении оси ξ.

К определённому моменту времени η будет иметь место соответствующее распределение температур насадки Θ и теплоносителя ϑ.

Требуется детерминировать вышеуказанное распределение температур насадки Θ и теплоносителя ϑ при заданных значениях Θ_1 и ϑ_1.

Решения в квадратурах исходной системы уравнений в частных производных для температур движущей среды ϑ и насадки Θ выглядят следующим образом [1—3]:

$$\vartheta = \vartheta_1 - (\vartheta_1 - \Theta_1)\int_0^{\xi} e^{-(\xi+\eta)} J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right] d\xi; \tag{10}$$

$$\Theta = \Theta_1 + (\vartheta_1 - \Theta_1)\int_0^{\eta} e^{-(\xi+\eta)} J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right] d\eta. \tag{11}$$

Решение для Θ (11) в том случае, когда её нужно рассчитать при заданном η для различных значений ξ лучше использовать решение, представленное в [3] следующим образом:

$$\Theta = \vartheta_1 - (\vartheta_1 - \Theta_1)e^{-\eta} + (\vartheta_1 - \Theta_1)\int_0^{\xi} e^{-(\xi+\eta)} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\, iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right] d\xi. \tag{12}$$

В выражениях (10)—(12): J_0 — функция Бесселя (цилиндрическая функция) первого рода нулевого порядка, J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка [7].

Для функции Бесселя первого рода *n*-го порядка [7]:

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+n}, \tag{13}$$

где $\Gamma(y)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{y-1}dt$ — гамма-функция.

При n = 0 и n = 1 соответственно имеем:

$$J_0(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!\,\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}; \qquad (14)$$

$$J_1(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!\,\Gamma(\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+1}. \qquad (15)$$

Используя свойство гамма-функции для целых значений n [7] — $\Gamma(n+1)=n!$, — получим:

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}; \qquad (16)$$

$$J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}. \qquad (17)$$

Вплоть до настоящего времени решения квадратурах (10)—(12) детерминировались только численным образом. Для этих целей использовалась соответствующие диаграммы, приведённые, например, в [3], или более точные и подробные [8].

В рамках данного исследования ставится задача точного аналитического решения исходной системы уравнений. Полученные точные решения системы уравнений имеют широкую общность и могут быть непосредственно использованы для расчётов полного распределения температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой для регенеративных теплообменных аппаратов.

Для получения точного решения рациональнее всего использовать подход, успешно применённый в работах [9—12]. Чтобы получить точное решение исходной системы уравнений в частных производных, необходимо разложить в степенной ряд экспоненциальную функцию и функции Бесселя первого рода нулевого J0 и первого J1 порядков, входящих в квадратуры (10)—(12) [7]:

$$e^{-(\xi+\eta)}=e^{-\xi}e^{-\eta}=e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\eta^n=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\xi^n; \qquad (18)$$

$$J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{2i\sqrt{\xi\eta}}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n\eta^n}{(n!)^2}; \qquad (19)$$

$$iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}=i\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{2i\sqrt{\xi\eta}}{2}\right)^{2n+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^{n+1}}{n!\,(n+1)!}\xi^n. \qquad (20)$$

Таким образом, имеем следующие степенные ряды:

$$J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a_{1n}\xi^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\eta^n; \qquad (21)$$

$$iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}=-\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n}\xi^n. \tag{22}$$

$$e^{-\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\eta^n; \tag{23}$$

$$e^{-\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\xi^n, \tag{24}$$

где $a_{1n}=\dfrac{\eta^n}{(n!)^2}$, $a_{2n}=\dfrac{\xi^n}{(n!)^2}$, $a_{3n}=-\dfrac{\eta^{n+1}}{n!\,(n+1)!}$; $b_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Произведения экспоненциальной функции и функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно равны:

$$e^{-\xi}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a_{1n}\xi^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n\xi^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}a_{1m}b_{n-m}\right)\xi^n; \tag{25}$$

$$e^{-\eta}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\eta^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n\eta^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}a_{2m}b_{n-m}\right)\eta^n; \tag{26}$$

$$e^{-\xi}iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n}\xi^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n\xi^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}a_{3m}b_{n-m}\right)\xi^n. \tag{27}$$

После подстановки, получим:

$$e^{-\xi}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{\eta^m}{(m!)^2}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right)\xi^n; \tag{28}$$

$$e^{-\eta}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right)\eta^n; \tag{29}$$

$$e^{-\xi}iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{\eta^{m+1}}{m!\,(m+1)!}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right)\xi^n. \tag{30}$$

Теперь необходимо провести соответствующие интегрирования, используя правило интегрирования бесконечных степенных рядов:

$$\int_0^{\xi}e^{-(\xi+\eta)}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]d\xi=e^{-\eta}\int_0^{\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^m}{(m!)^2}\right)\xi^n d\xi=$$

$$=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\xi}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^m}{(m!)^2}\right)\xi^n d\xi=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^m}{(m!)^2}\right)\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}\Bigg|_0^{\xi}; \tag{31}$$

$$\int_0^{\eta}e^{-(\xi+\eta)}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]d\eta=e^{-\xi}\int_0^{\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\right)\eta^n d\eta=$$

$$=e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\eta}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\right)\eta^n d\eta=e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\right)\frac{\eta^{n+1}}{(n+1)}\Bigg|_0^{\eta}; \tag{32}$$

$$\int_0^{\xi} e^{-(\xi+\eta)}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]d\xi = -e^{-\eta}\int_0^{\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\,\frac{\eta^{m+1}}{m!\,(m+1)!}\right)\xi^n d\xi = \tag{33}$$

$$= -e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\xi}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\,\frac{\eta^{m+1}}{m!\,(m+1)!}\right)\xi^n d\xi = -e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\,\frac{\eta^{m+1}}{m!\,(m+1)!}\right)\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}\Bigg|_0^{\xi}.$$

После подстановки пределов интегрирования, окончательно получим:

$$\int_0^{\xi} e^{-(\xi+\eta)}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]d\xi = e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\,\frac{\eta^m}{(m!)^2}\,\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}; \tag{34}$$

$$\int_0^{\eta} e^{-(\xi+\eta)}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]d\eta = e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\,\frac{\xi^m}{(m!)^2}\,\frac{\eta^{n+1}}{(n+1)}; \tag{35}$$

$$\int_0^{\xi} e^{-(\xi+\eta)}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]d\xi = -e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\,\frac{\eta^{m+1}}{m!\,(m+1)!}\,\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}. \tag{36}$$

Окончательные выражения для решений исходной системы уравнений будут выглядеть следующим образом:

$$\vartheta = \vartheta_1 - (\vartheta_1 - \Theta_1)\,e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\,\frac{\eta^m}{(m!)^2}\,\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}; \tag{37}$$

$$\Theta = \Theta_1 + (\vartheta_1 - \Theta_1)\,e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\,\frac{\xi^m}{(m!)^2}\,\frac{\eta^{n+1}}{(n+1)}; \tag{38}$$

$$\Theta = \vartheta_1 - (\vartheta_1 - \Theta_1)\,e^{-\eta} - (\vartheta_1 - \Theta_1)\,e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\,\frac{\eta^{m+1}}{m!\,(m+1)!}\,\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)} = \tag{39}$$

$$= \vartheta_1 - e^{-\eta}(\vartheta_1 - \Theta_1)\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\,\frac{\eta^{m+1}}{m!\,(m+1)!}\,\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}\right).$$

Точные аналитические решения (38) и (39) эквивалентны, в отличие от приближённых решений (11) и (12) соответственно, что является дополнительным преимуществом полученных первых решений перед последними, поскольку интегрирования по ξ и η неэквивалентны. Поэтому достаточно только одного точного аналитического решения, в то время как для численных расчётов могут понадобиться решения, содержащие интегрирование как по ξ, так и по η.

Преимущественность точных аналитических решений исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных над приближёнными указываются также в аналогичных исследованиях [9—12].

Расчёт по точным решениям (37) или (38)—(39) полностью соответствует данным, представленным на диаграммах, приведённых в [3, 8, 13], но имеет перед последними неоспоримое преимущество, поскольку данные [3, 8, 13] были получены численным образом. Неоспоримое преимущество точных решений состоит также в том, что они не имеют известного рода ограничений относительно определяющих параметров ξ и η, имеющихся в [3, 8, 13].

Проведённые в рамках данного исследования численные расчёты решений исходной системы уравнений по формулам (10), (11) или (12) для широкого диапазона определяющих параметров ξ и η полностью соответствуют расчётам по точным решениям (37), (38) или (39), если расчёты проводятся при одинаковой наперёд заданной погрешностью, следовательно, доказана редукция существующих численных решений по отношению к точным аналитическим решениям, полученным в рамках данного исследования.

Ещё одним неоспоримым достоинством точных аналитических решений перед существующими численными состоит в выявлении имманентной связи между определяющими и определяемыми параметрами, так же то, что ими можно непосредственно воспользоваться при расчёте, не прибегая к помощи диаграмм (номограмм) или вычислительной техники.

3. Точное аналитическое решение задачи о полном распределении температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой с произвольно распределённой начальной температурой

В предыдущем разделе было получено точное аналитическое решение задачи о полном распределении температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой одинаково распределённой начальной температурой, т.е. в предположении, что в начальный момент времени η=0 насадка имеет всюду одинаковую температуру Θ_1=0. Следовательно, возникает необходимость получения точного аналитического решения задачи о полном распределении температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой с произвольно распределённой начальной температурой.

Постановка задачи в этом случае будет выглядеть следующим образом.

В начальный момент времени η=0 теплоноситель входит в регенератор в сечении ξ=0 с неизменной температурой $\vartheta = \vartheta_1$.

Температура насадки к моменту времени η=0 является произвольно заданной функцией координаты ξ, а именно:

$$\Theta = \vartheta_1 + f(\xi), \tag{40}$$

где $f(\xi)$ — начальная избыточная температура насадки относительно температуры теплоносителя на входе.

Начиная с этого момента теплоноситель входит в регенератор в сечении ξ=0 с неизменной во времени температурой $\vartheta = \vartheta_1$ и движется через регенератор в положительном направлении оси ξ.

К определённому моменту времени η будет иметь место соответствующее распределение температур насадки Θ и теплоносителя ϑ.

Требуется детерминировать вышеуказанное распределение температур насадки Θ и теплоносителя ϑ при заданном произвольном распределении температуры насадки $\Theta = \vartheta_1 + f(\xi)$ и температуре теплоносителя ϑ_1.

Решения в квадратурах исходной системы уравнений в частных производных для температур движущей среды ϑ и насадки Θ в этом случае выглядят следующим образом [2—3]:

$$\vartheta = \vartheta_1 + \int_0^{\xi} f(\varepsilon)\, e^{-(\xi-\varepsilon+\eta)} J_0\left[2i\sqrt{(\xi-\varepsilon)\eta}\right] d\varepsilon; \tag{41}$$

$$\Theta = \vartheta_1 + f(\xi)\, e^{-\eta} - \int_0^{\xi} f(\varepsilon)\, e^{-(\xi-\varepsilon+\eta)} \sqrt{\frac{\eta}{\xi-\varepsilon}}\, i\, J_1\left[2i\sqrt{(\xi-\varepsilon)\eta}\right] d\varepsilon. \tag{42}$$

Методом непосредственной подстановки можно показать, что это решение удовлетворяет вышепредставленным условиям: $\vartheta|_{\xi=0}=\vartheta;$ $\Theta|_{\eta=0}=\vartheta+f(\xi)$, что дополнительно показано в [3].

Данные решения квадратурах (41)—(42) рассчитывались только численным образом. Для получения точных решений и в этом случае воспользуемся тем же методом, применённом в предыдущем разделе, а также в [9—12].

В общем случае начальная избыточная температура насадки относительно температуры теплоносителя на входе $f(\xi)$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \xi^n. \tag{43}$$

Следовательно, первый интеграл (41) может быть представлен в следующем виде:

$$\int_0^{\xi}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \varepsilon^n \cdot e^{-(\xi-\varepsilon+\eta)} J_0\left[2i\sqrt{(\xi-\varepsilon)\eta}\right]d\varepsilon=\int_0^{\xi}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \varepsilon^n \cdot e^{-(\xi-\varepsilon+\eta)} J_0\left[2i\sqrt{(\xi-\varepsilon)\eta}\right]d\varepsilon=$$
$$=\int_0^{\xi} e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\varepsilon-\xi)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\varepsilon-\xi)^n \eta^n}{(n!)^2}\,d\varepsilon. \tag{44}$$

После произведения двух последних рядов по правилу, применённому в предыдущем разделе (а также в [9—12]), получим:

$$\int_0^{\xi} e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\varepsilon-\xi)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\varepsilon-\xi)^n \eta^n}{(n!)^2}\,d\varepsilon=$$
$$=\int_0^{\xi} e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\eta^m \frac{1}{(n-m)!}(\varepsilon-\xi)^n\,d\varepsilon. \tag{45}$$

Теперь следует привести двойной ряд по степеням $(\varepsilon—\xi)^n$ к рядам со степенями по ε^n:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\eta^m \frac{1}{(n-m)!}(\varepsilon-\xi)^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\eta^m \frac{1}{(n-m)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\xi^k\varepsilon^{n-k}= \tag{46}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\eta^m \frac{1}{(n-m)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\xi^k\varepsilon^{n-k},$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты (число сочетаний из n элементов по k).

Произведение последнего ряда (46) на ряд для начальной избыточной температуры насадки относительно температуры теплоносителя на входе (43) по уже известному правилу даёт:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \eta^m \frac{1}{(n-m)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \xi^k \varepsilon^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \eta^m \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p} \varepsilon^{n-k}. \qquad (47)$$

Далее проводится интегрирование, как и в предыдущем разделе, используя правило интегрирования бесконечных степенных рядов:

$$\int_0^{\xi} e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \eta^m \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p}\, \varepsilon^{n-k}\, d\varepsilon =$$

$$= e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\xi} \sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \eta^m \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p}\, \varepsilon^{n-k} d\varepsilon =$$

$$= e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\xi} \sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \eta^m \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p}\, \varepsilon^{n-k} d\varepsilon =$$

$$= e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \eta^m \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p} \left. \frac{\varepsilon^{n-k+1}}{n-k+1} \right|_0^{\xi} = \qquad (48)$$

$$= e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \eta^m \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p} \left. \frac{\varepsilon^{n-k+1}}{n-k+1} \right|_0^{\xi} =$$

$$= e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \eta^m \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p} \frac{\xi^{n-k+1}}{(n-k+1)}.$$

После соответствующих упрощений искомое решение будет выглядеть следующим образом:

$$\vartheta = \vartheta_1 + e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^{m+k}}{(m!)^2} \frac{1}{(p-m)!} \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{1}{(n-k+1)} f_{n-p} \eta^m \xi^{n+1}. \qquad (49)$$

Аналогичным образом можно получить решение относительно второго интеграла (42):

$$\int_0^{\xi} f(\varepsilon) e^{-(\xi-\varepsilon+\eta)} \sqrt{\frac{\eta}{\xi-\varepsilon}}\, i J_1\left[2i\sqrt{(\xi-\varepsilon)\eta}\right] d\varepsilon = \int_0^{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^n \cdot e^{-(\xi-\varepsilon+\eta)} \sqrt{\frac{\eta}{\xi-\varepsilon}}\, i J_1\left[2i\sqrt{(\xi-\varepsilon)\eta}\right] d\varepsilon =$$

$$= \int_0^{\xi} e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\varepsilon-\xi)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\varepsilon-\xi)^n \eta^{n+1}}{n!(n+1)!} d\varepsilon. \qquad (50)$$

Произведение двух последних рядов по правилу, применённому в предыдущем разделе (а также в [9—12]), даёт:

$$\int_0^{\xi} e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\varepsilon-\xi)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\varepsilon-\xi)^n \eta^{n+1}}{n!(n+1)!} d\varepsilon =$$

$$= \int_0^{\xi} e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(n-m)!} (\varepsilon-\xi)^n d\varepsilon. \qquad (51)$$

Приведение двойного ряда по степеням $(\varepsilon—\xi)^n$ к рядам со степенями по ε^n даёт:

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!}\eta^{m+1}\frac{1}{(n-m)!}(\varepsilon-\xi)^n=\\=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!}\eta^{m+1}\frac{1}{(n-m)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\xi^k\varepsilon^{n-k}=\\=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!}\eta^{m+1}\frac{1}{(n-m)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\xi^k\varepsilon^{n-k}.\end{gathered}\tag{52}$$

Произведение ряда (52) на ряд для начальной избыточной температуры насадки относительно температуры теплоносителя на входе (43) по уже известному правилу даёт:

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}f_n\varepsilon^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!}\eta^{m+1}\frac{1}{(n-m)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\xi^k\varepsilon^{n-k}=\\=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!}\eta^{m+1}\frac{1}{(p-m)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\varepsilon^{n-k}.\end{gathered}\tag{53}$$

Далее проводится интегрирование, как и в предыдущем разделе, используя правило интегрирования бесконечных степенных рядов:

$$\begin{gathered}\int_0^{\xi}e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!}\eta^{m+1}\frac{1}{(p-m)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\,\varepsilon^{n-k}\,d\varepsilon=\\=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\xi}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!}\eta^{m+1}\frac{1}{(p-m)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\,\varepsilon^{n-k}d\varepsilon=\\=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\xi}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!}\eta^{m+1}\frac{1}{(p-m)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\,\varepsilon^{n-k}d\varepsilon=\\=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!}\eta^{m+1}\frac{1}{(p-m)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\left.\frac{\varepsilon^{n-k+1}}{n-k+1}\right|_0^{\xi}=\\=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!}\eta^{m+1}\frac{1}{(p-m)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\left.\frac{\varepsilon^{n-k+1}}{n-k+1}\right|_0^{\xi}=\\=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!}\eta^{m+1}\frac{1}{(p-m)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\frac{\xi^{n-k+1}}{(n-k+1)}.\end{gathered}\tag{54}$$

После упрощений искомое решение примет вид:

$$\begin{gathered}\Theta=\vartheta_1+f(\xi)e^{-\eta}-\\-e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^{m+k+1}}{m!(m+1)!}\frac{1}{(p-m)!}\frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{1}{(n-k+1)}f_{n-p}\eta^{m+1}\xi^{n+1}.\end{gathered}\tag{55}$$

Окончательным видом решения для Θ будет представление его в том же виде, что и для решения для ϑ (49):

$$\Theta = \vartheta_1 + e^{-\eta} \times \tag{56}$$

$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \xi^n - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^{m+k+1}}{m!(m+1)!} \frac{1}{(p-m)!} \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{1}{(n-k+1)} f_{n-p} \eta^{m+1} \xi^{n+1}\right).$$

Преимущество решений (49) и (56) перед (41) и (42) состоит том, что решения (49) и (56) являются точными решениями исходной системы уравнений в частных производных, в то время как (41) и (42) — лишь приближёнными.

В рамках данной работы были проведены численные расчёты решений исходной системы уравнений по формулам (41) и (42) для широкого диапазона определяющих параметров ξ и η, а также для многообразных функций для начальной избыточной температуры насадки относительно температуры теплоносителя на входе $f(\xi)$. Вышеуказанные расчёты полностью совпали с расчётами по точным решениям (49) и (56), поскольку проводились с одинаковой наперёд заданной погрешностью.

Следовательно, доказана редукция существующих численных решений по отношению к точным аналитическим решениям, полученным в рамках данного исследования.

Достоинство полученных точных аналитических (49) и (56) решений перед существующими численными (41) и (42) состоит также в выявлении имманентной связи между определяющими и определяемыми параметрами, и их можно непосредственно использовать при расчёте, не прибегая к помощи вычислительной техники.

Нелишне будет отметить, что в том случае, когда функция для начальной избыточной температуры насадки относительно температуры теплоносителя на входе $f(\xi)$ будет иметь более простой вид по сравнению с общим видом (43), точное аналитическое решение может быть получено несколько проще путём интегрирования соответствующих функциональных рядов. В последнем случае вид точных аналитических решений будет более простым, чем вид решений (49) и (56).

Выводы

Резюмируя, можно сказать, что в данном исследовании были получены точные аналитические решения задачи о полном распределении температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой, имеющей как одинаковую, так и произвольно заданную, начальную температуру (задача Анцелиуса—Нуссельта).

Вышеприведённые точные аналитические решения имеют неоспоримое преимущество перед существующими численными, поскольку выявляют имманентную связь между определяющими и определяемыми параметрами; ими можно непосредственно воспользоваться при расчёте, не прибегая к помощи диаграмм (номограмм) или вычислительной техники.

Литература

1. Anzelius A. Über Erwärmung vermittels durchströmender Medien. Z. angew. Math. Mech. 1926. Bd. 6. S. 291.

2. Nußelt W. Die Theorie des Winderhitzers. Z. VDI. 1927. Bd. 71. S. 85.

3. Хаузен Х. Теплопередача при противотоке, прямотоке и перекрёстном токе. М.: Энергоиздат, 1981. 384 с.

4. Нестационарный теплообмен / Кошкин В.К., Калинин Э.К., Дрейцер Г.А., Ярхо С.А. М.: Машиностроение, 1973. 328 с.

5. Kalinin E.K., Dreitser G.A. Unsteady Convective Heat Transfer in Channels / Advances in heat transfer. Volume 25. New York: Academic Press, 1994. P. 1—150.

6. Галицейский Б.М., Дрейцер Г.А. Нестационарное поле температур стенки трубы и теплоносителя при малых значениях критерия Bi. Известия вузов. Авиационная техника. 1970. № 2. С. 90—98.

7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

8. Schumann T.E.W. Heat Transfer: A Liquid Flowing through a Porous Prism. J. Franklin Inst. 1929. V. 208. P. 405.

9. Лобанов И.Е. Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Труды Четвёртой Российской национальной конференции по теплообмену. В 8 томах. Т. 2. Вынужденная конвекция однофазной жидкости. М.: МЭИ, 2006. С. 187—190.

10. Лобанов И.Е. Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Тезисы докладов и сообщений VI Минского международного форума по тепломассообмену. Минск, 2008. Т. 1. С. 122—124.

11. Лобанов И.Е. Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Тезисы докладов и сообщений VI Минского международного форума по тепломассообмену. Минск, 2008. Секция № 1. Конвективный тепломассообмен. Доклад № 1—40. С. 1—8.

12. Лобанов И.Е. Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Известия вузов. Авиационная техника. 2008. № 2. С. 37—40.

13. Теория тепломассообмена / Под ред. А.И.Леонтьева. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 683 с.