

## РАСЧЁТ ПОЛЕЙ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В МАССИВНОМ ТЕЛЕ ПРИ НАГРЕВЕ ЕГО ТОЧЕЧНЫМ НЕПРЕРЫВНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

**В.А. Пинскер**

*ОАО «Корпорация «ВНИИЭМ», г. Москва, Россия*

Victorp2009@yandex.ru

### **АННОТАЦИЯ**

Точное автомодельное решение одной из основных задач несвязанной термоупругости, полученное ранее в замкнутом интегральном виде, исследовано при всех допустимых значениях коэффициента Пуассона. Установлены интервалы монотонности и координаты границы участков растяжения и сжатия для радиального и окружного напряжений на оси симметрии. Изучена геометрия и динамика нулевых изобар, аналитически рассчитаны уравнения их асимптот и определены области знакопостоянства всех компонент. Показано, что при  $-0.19 > \nu > 0.5$  фронт «сжатие-растяжение» состоит из двух ветвей, а при  $\nu \leq -0.19$  и  $\nu = 0.5$  – из одной. Найдены максимальные величины напряжений при разных  $\nu$  и определено местоположение точек максимумов на координатном поле. Доказано, что при  $\nu < -0.7$  в материале возможно только радиальное сжатие. Рассчитано критическое значение  $\nu$ , при котором максимум радиального растяжения достигает оси симметрии. Установлено, что у окружной компоненты при больших  $\nu$  появляется дополнительный максимум растяжений, лежащий вне начала координат. Для радиальной и окружной компонент обнаружено существование поверхностей вращения, состоящих из линий пересечения изобар, соответствующих различным значениям коэффициента Пуассона, но одинаковым значениям напряжений. Определены координаты этих поверхностей. Проанализирована эволюция формы изобар при изменении величины  $\nu$ .

### **1. ВВЕДЕНИЕ**

Изучение термонапряжённого состояния нагреваемых упругих материалов с различными значениями коэффициента Пуассона, включая и отрицательные, представляет большой интерес и активно развивается в связи с появлением новых синтетических веществ, обладающих неожиданными свойствами и широким применением этих веществ в технике для работы в самых разнообразных условиях, например, при локальных интенсивных тепловых воздействиях.

В рамках квазистатической несвязанной линейной термоупругости рассматривается задача о распределении температурных напряжений в однородном и изотропном полупространстве при нагреве его точечным непрерывно действующим источником тепла постоянной интенсивности, расположенным на теплоизолированной поверхности, свободной от нормальных и касательных нагрузок. Внутренние массовые силы отсутствуют, а свойства материала не зависят от температуры.

Точное аналитическое решение пространственной осесимметричной автомодельной задачи,

полученное с помощью потенциала Гудьера и функции Лява, приведено в статьях [1,2] в интегральном виде, а на свободной поверхности, на оси симметрии, и при установившемся режиме нагрева – в явном виде в публикации [3].

Данная работа продолжает исследования, начатые в статьях [1-3] для материалов с положительными значениями коэффициента Пуассона  $\nu$  и распространяет их на весь возможный диапазон  $-1 \leq \nu \leq 1/2$ . Все ранее принятые обозначения сохраняются.

Напомним, что в цилиндрической системе координат  $Orz$  радиальная ось  $r$  лежит на поверхности полуограниченного тела; ось  $z$  направлена по нормали к ней вглубь полупространства, а начало координат (точка  $O$ ) совпадает с источником тепла мощности  $Q$ , начинающим действовать в момент времени  $t = 0$ . В постановке задачи отсутствуют характерные линейные размеры, поэтому безразмерные термоупругие напряжения  $p_{ij}$  будут выражаться через две автомодельные переменные  $\rho$

$$\rho = \frac{r}{2\sqrt{at}} \text{ и } x = \frac{z}{2\sqrt{at}}, \text{ где } a - \text{температуропроводность материала. Введём также } s = \sqrt{\rho^2 + x^2}.$$

Так как в выражения для осевой и сдвиговой компонент (формулы (4) и (5) из [2]), величина  $\nu$  входит лишь в виде масштабного коэффициента  $1/(1-\nu)$ , и, таким образом, не влияет на пространственную конфигурацию и динамику развития этих напряжений, детально изученных ранее, сосредоточимся здесь на рассмотрении только радиальной и окружной компонент.

## **2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИАЛЬНОГО И ОКРУЖНОГО НАПРЯЖЕНИЙ ВДОЛЬ ОСИ СИММЕТРИИ И НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Численные расчёты величин  $p_{\rho\rho}(0,x) = p_{\phi\phi}(0,x)$ , проведённые по формулам (10) из работы [2] для всех допустимых значений коэффициента Пуассона, позволяют установить интервалы монотонности обеих компонент, глубину расположения экстремумов, а также координаты границы участков растяжения и сжатия при  $\rho = 0$  в зависимости от величины  $\nu$ . Процесс эволюции распределения напряжений по мере изменения значения  $\nu$ , основанный на результатах этих расчётов, подробно описан в работе [4] и представлен на Рис.1.

1. В диапазоне  $-1 \leq \nu < -0.325$  имеет место монотонный рост значения обеих компонент от  $-\infty$  до нуля по мере удаления от источника тепла (линия 5 на Рис.1). При  $\nu = -0.325$  эта монотонность

нарушается и внутри интервала  $2.157 < x < 2.177$  в области сжатия формируется плоский участок типа плато с постоянными значениями  $p_{pp} = p_{\phi\phi} = -0.0036$  (линия 4 на Рис.1).

2. По мере дальнейшего увеличения коэффициента Пуассона в интервале  $-0.325 \leq \nu < -0.19$ , характер распределения обеих компонент качественно изменяется: оставаясь сжимающими, они по мере углубления сначала возрастают от  $-\infty$  до некоторого локального максимума, затем уменьшаются до локального минимума, после чего снова увеличиваются, стремясь к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .

3.  $\nu = -0.19$ . Здесь в точке максимума напряжений, которая находится на глубине  $x = 1.822$ , впервые достигается значение  $p_{pp} = p_{\phi\phi} = 0$ . Величина локального максимума сжатия в этом случае составляет  $p_{pp}(0, 2.974) = p_{\phi\phi}(0, 2.974) = -0.002185$  (линия 3 на Рис.1).

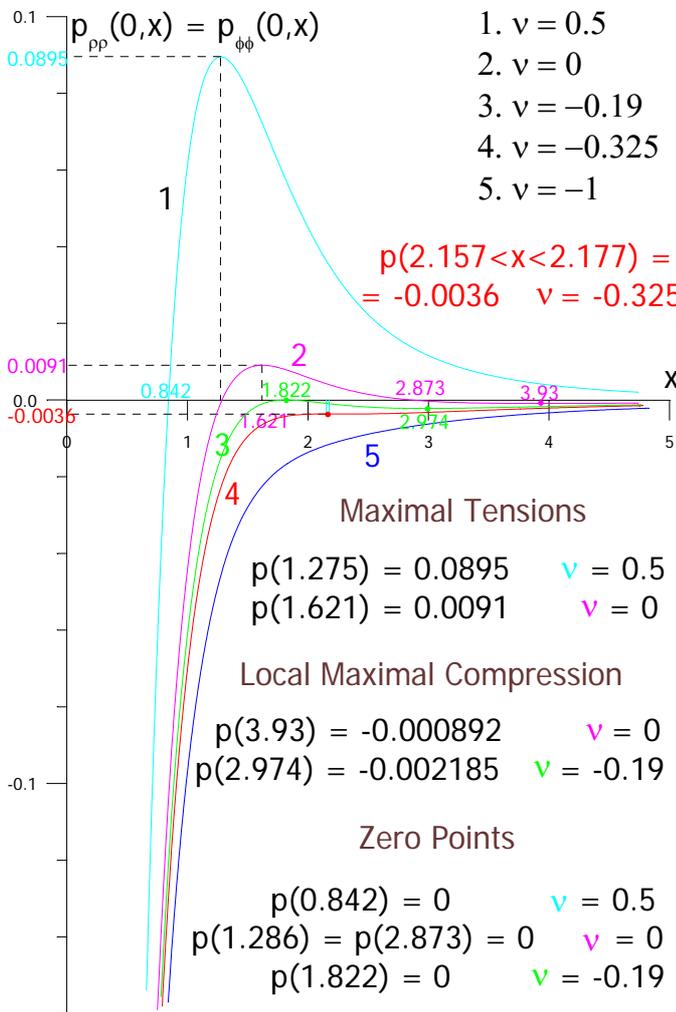


Рис.1. Радиальное и окружное напряжения на оси симметрии для различных значений  $\nu$ .

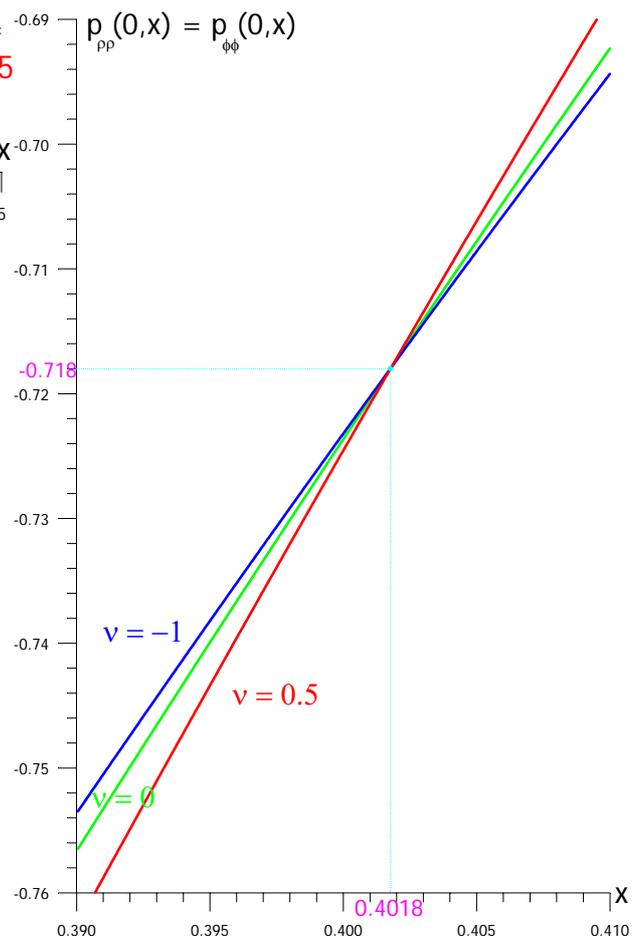


Рис.2. Точка пересечения радиального и окружного напряжений на оси симметрии для различных значений  $\nu$ .

4. По мере дальнейшего роста коэффициента Пуассона вплоть до  $\frac{1}{2}$ , у обоих напряжений на оси симметрии появляется растущий участок растяжения (линия 2 на Рис.1), границы которого постоянно расширяются как влево (стремясь к предельной величине  $x = 0.842$  при  $\nu = \frac{1}{2}$ ), так и вправо (стремясь к бесконечности при  $\nu = \frac{1}{2}$ ). При этом глубина, на которой лежит максимум этих растяжений монотонно убывает с ростом  $\nu$  вплоть до  $x = 1.275$  при  $\nu = \frac{1}{2}$ , тогда как величина этого максимума монотонно возрастает до значения  $p(0,1.275) = 0.0895$  при  $\nu = \frac{1}{2}$  (линия 1 на Рис.1).

Отметим также, что все графики  $p_{pp}(0, x) = p_{\phi\phi}(0, x)$ , пересекаются в одной точке, лежащей на глубине  $x = 0.402$ , где обе компоненты принимают значение  $p(0, 0.402) = -0.718$ . Это показано на Рис.2.

На свободной поверхности обе компоненты при  $\nu < 0$  качественно ведут себя так же, как и при  $\nu > 0$  (см. рис. (5) и (6) в работе [2]). Радиальное напряжение, будучи сжимающим, монотонно возрастает от  $-\infty$  в начале координат до нуля по мере удаления от источника тепла, тогда как окружное напряжение, будучи растягивающим, монотонно убывает от максимального значения в начале координат до нуля по мере удаления от источника тепла к периферии, так как здесь коэффициент Пуассона определяет только величину масштабного коэффициента (см. [1–3]).

### 3. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Сначала определим уравнения асимптот изобар нулевого напряжения для радиальной компоненты, используя её приближённое выражение на большом удалении от источника тепла. Из равенства  $p_{pp}(\rho \gg 1, x \gg 1) = 0$ , согласно формулам, приведённым в работах [1–3], находим соотношение  $3(4x^2 - \rho^2)\rho^2 = (1 - 2\nu)(x^2 + \rho^2)^2$ .

Вводя параметр  $\xi = x/\rho$ , который имеет геометрический смысл тангенса угла наклона выходящей из начала координат асимптоты изобары нулевого напряжения к свободной поверхности, получаем биквадратное уравнение  $(1 - 2\nu)\xi^4 - 2(2\nu + 5)\xi^2 + 2(2 - \nu) = 0$ .

При  $\nu \neq \frac{1}{2}$  оно имеет следующие корни: 
$$\xi^2 = \frac{2\nu + 5 \pm \sqrt{30\nu + 21}}{1 - 2\nu}.$$

Заметим, что для всех  $\nu \geq -0.7$  подкоренное выражение положительно. Непосредственный анализ показывает, что при этом условии правая часть найденной формулы всегда неотрицательна и, следовательно, асимптоты изобары  $p_{pp}(\rho, x) = 0$ , (а соответственно и области, в которых величина  $p_{pp}$

имеет разные знаки), существуют; тогда как при  $-1 \leq \nu \leq -0.7$  у биквадратного уравнения нет действительных корней, а в нагреваемом теле возможно только радиальное сжатие.

Очевидно, у изобары  $p_{pp}(\rho, x) = 0$  при  $-0.7 \leq \nu < 1/2$  асимптот всегда две, за исключением предельного случая  $\nu = -0.7$ , когда обе они сливаются в одну, имеющую вид прямой линии  $\xi = \sqrt{3/2} \approx 1.2247$ . Она наклонена к свободной поверхности под углом  $50.77^\circ$ .

Для материалов, у которых коэффициент Пуассона лежит в интервале  $-0.7 \leq \nu < 0.5$  общую приближённую формулу радиального напряжения, приведённую в работах [1–3] при больших значениях аргументов удобно записать в виде произведения двух сомножителей, заключённых в квадратные скобки:  $p_{pp}(\rho \gg 1, x \gg 1) \approx$

$$\approx -\frac{1}{4(1-\nu)(1-2\nu)s^7} [(1-2\nu)x^2 - (5+2\nu+\sqrt{21+30\nu})\rho^2][(1-2\nu)x^2 - (5+2\nu-\sqrt{21+30\nu})\rho^2].$$

В частности, при  $\nu = -0.7$  имеем  $p_{pp}(\rho \gg 1, x \gg 1) \approx -\frac{6(x^2 - 3\rho^2/2)^2}{17s^7}$ .

Если коэффициент Пуассона лежит в диапазоне  $-1 \leq \nu \leq -0.7$ , эту же формулу удобно записать в виде суммы двух положительных слагаемых, заключённых в фигурные скобки:

$$p_{pp}(\rho \gg 1, x \gg 1) \approx -\frac{1}{4(1-\nu)(1-2\nu)s^7} \{[(1-2\nu)x^2 - (5+2\nu)\rho^2]^2 + 3(-7-10\nu)\rho^4\}.$$

Растягивающее радиальное напряжение, отсутствующее в интервале  $-1 \leq \nu < -0.7$ , впервые появляется при  $\nu = -0.7$ , сначала на бесконечном удалении от источника тепла, на линии  $x = \sqrt{3/2} \rho \approx 1.2247\rho$ ; затем точка максимума  $p_{pp}$  монотонно приближается к началу координат по мере роста величины  $\nu$  (Рис.3), причем до выхода области растяжений на ось симметрии (т.е. в интервале  $-0.7 \leq \nu \leq -0.19$ ), изобары положительных напряжений имеют форму вложенных эллипсов, окружающих точку максимального растяжения и расположенных внутри изобары  $p_{pp}(\rho, x) = 0$ , которая, в свою очередь, напоминает параболу, лежащую внутри угла, образованного двумя асимптотами, выходящими из начала координат. Картина нулевых изобар представлена на Рис.4.

В частности, при  $\nu = -0.325$ , когда на оси симметрии формируется плоский участок типа плато  $p_{pp}(0, 2.157 \leq x \leq 2.177) = -0.0036$ , асимптоты будут иметь вид:  $x = 2.16\rho$  и  $x = 0.777\rho$ , а углы их

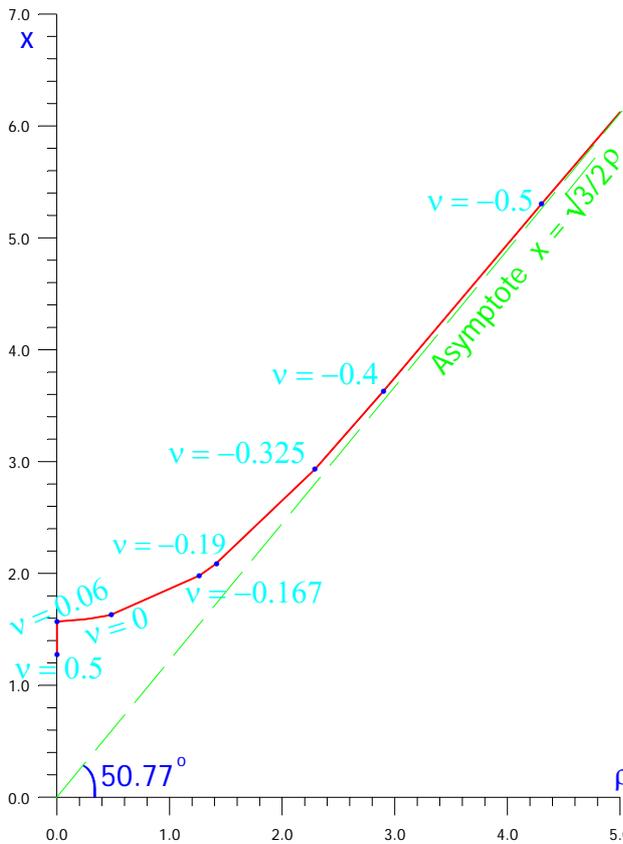


Рис.3. Положение максимума радиального растяжения.

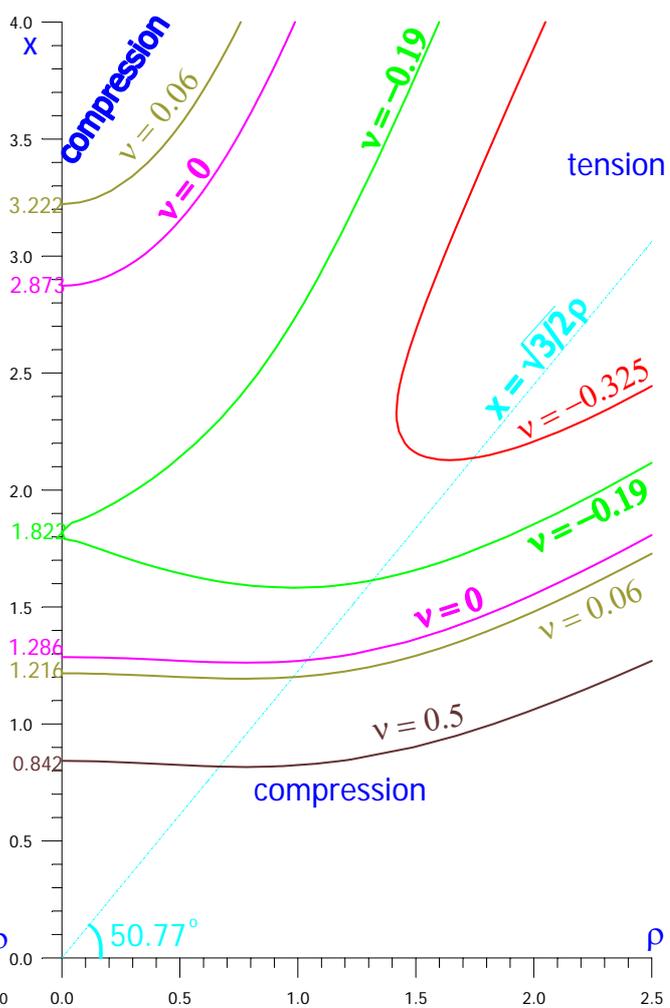


Рис.4. Изобары радиального напряжения  $p_{\rho\rho} = 0$  для различных значений  $\nu$ .

наклона к свободной поверхности составляют соответственно  $65.166^\circ$  и  $37.84^\circ$ . Максимальное растяжение в этом случае равно  $p_{\rho\rho}(2.29, 2.93) = 0.0005752$ , низшая точка нулевой изобары имеет координаты  $\rho = 1.643, x = 2.128$ , а её ближайшая точка к оси симметрии —  $\rho = 1.418, x = 2.33$ . Таким образом, как внутри цилиндра  $0 \leq \rho < 1.418$ , так и в приповерхностном плоском слое  $0 < x < 2.128$ , возможно только сжатие.

При  $\nu = -0.19$ , когда нулевая изобара радиального напряжения впервые касается оси симметрии на глубине  $x = 1.822$ , асимптоты будут иметь вид:  $x = 2.4864\rho$  и  $x = 0.7165\rho$ , а углы их наклона к свободной поверхности — соответственно  $68.09^\circ$  и  $35.62^\circ$ . Максимальное растяжение в этом случае равно  $p_{\rho\rho}(1.404, 2.08) = 0.0021$ , а низшая точка нулевой изобары имеет координаты  $\rho = 0.981, x = 1.582$ , т.е. в приповерхностном слое  $0 < x < 1.582$  возможно только радиальное сжатие.

Ясно, что при  $-0.19 < \nu < \frac{1}{2}$  изобары  $p_{pp}(\rho, x) = 0$  состоят из двух ветвей, а при  $\nu \leq -0.19$  – из одной. Как показано в [1–3], при наибольшем  $\nu = \frac{1}{2}$  изобара  $p_{pp} = 0$  также состоит из одной ветви (см. Рис. 6).

Отметим, что для  $\nu < 0.06$  радиальное растяжение достигает максимума вне оси симметрии (в частности, как видно на Рисунке 7, при  $\nu = 0$  абсолютное максимальное растяжение  $p_{pp}(0.48, 1.63) = 0.0092$ , тогда как наибольшее растяжение на оси составляет  $p_{pp}(0, 1.62) = 0.0091$ ), а для  $\nu \geq 0.06$  максимум  $p_{pp}$  достигается на оси симметрии (см. Рис.3).

В пограничном случае при  $\nu = 0.06$  выполняется равенство  $p_{pp}(0, 1.572) = 0.0132377$ , а область положительных значений  $p_{pp}$  на оси  $\rho = 0$  лежит в интервале  $1.216 < x < 3.222$ , тогда как локальный максимум сжатия  $p_{pp}(0, 4.4) = -0.000616$ . При этом асимптоты нулевых изобар будут иметь вид:  $x = 3.353\rho$  и  $x = 0.626\rho$ , а углы их наклона к свободной границе – соответственно  $73.4^\circ$  и  $32.1^\circ$  (см. Рис.8).

При дальнейшем росте коэффициента Пуассона положение максимума смещается вдоль оси в сторону источника тепла, достигая наименьшей предельной глубины  $x = 1.275$  при  $\nu = \frac{1}{2}$  (см. Рис.3).

Таким образом, по мере роста величины  $\nu$  от  $-0.7$  до  $\frac{1}{2}$ , угол между обеими асимптотами постоянно увеличивается от нуля (при  $\nu = -0.7$ ) до  $\arctg(2)$  при  $\nu = \frac{1}{2}$ , когда верхняя асимптота сливается с осью  $x$  и исчезает (Рис.6). Максимальное значение растягивающих напряжений при этом монотонно возрастает от нуля (при  $\nu = -0.7$ ) до  $0.0895$  при  $\nu = \frac{1}{2}$  (см. Рис.5).

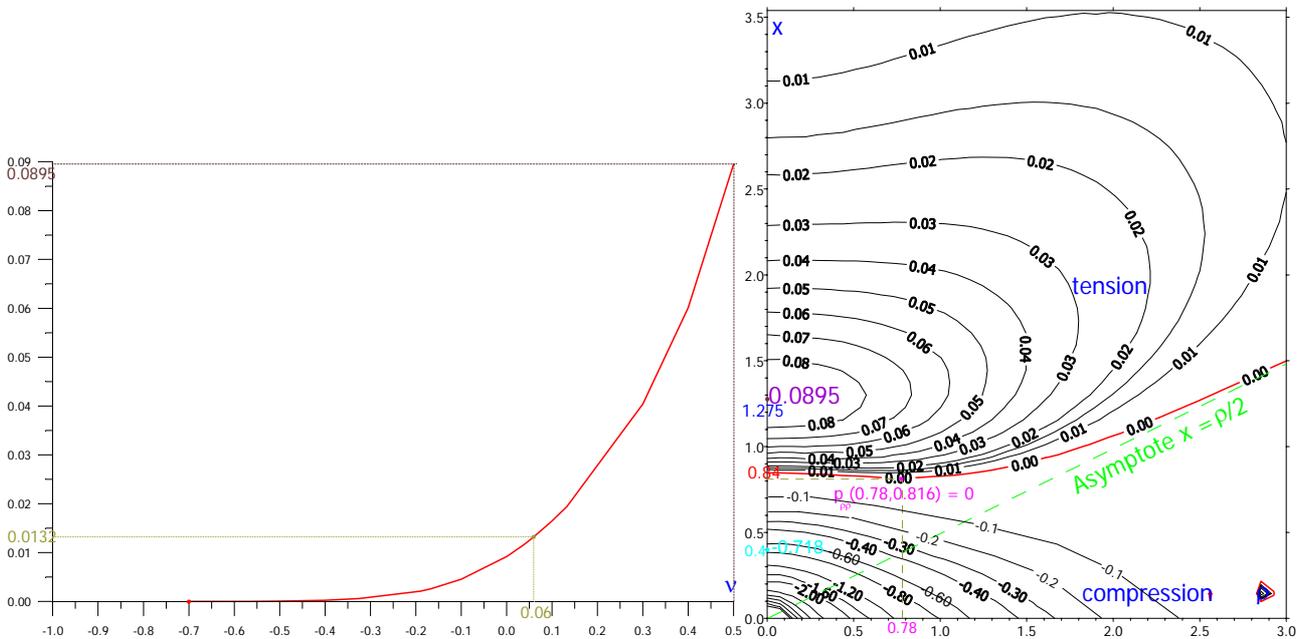


Рис.5 Величина максимума радиального растяжения при всех  $\nu$ . Рис.6 Распределение изобар  $p_{pp}$  при  $\nu = \frac{1}{2}$

Поля изобар радиального напряжения для некоторых значений  $\nu$  представлены на рисунках 6–8.

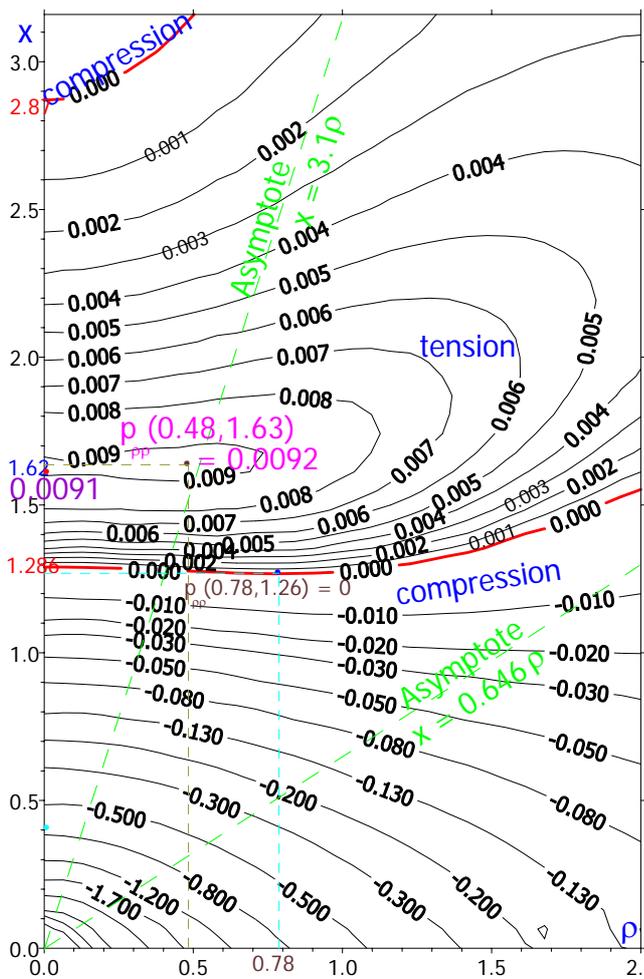


Рис.7 Распределение изобар  $p_{pp}$  при  $\nu = 0$

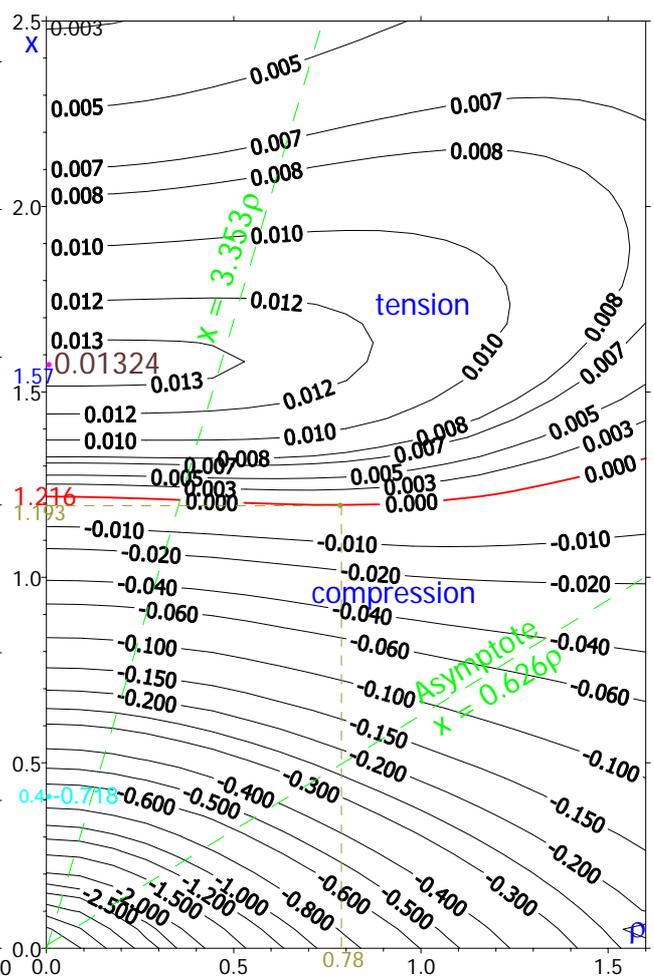


Рис.8 Распределение изобар  $p_{pp}$  при  $\nu = 0.06$

#### 4. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОКРУЖНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Как показывают расчёты, при больших значениях коэффициента Пуассона у окружной компоненты появляется дополнительный максимум растяжений вне начала координат. Впервые возникая при  $\nu = 0.3957$  в точке  $\rho = 1.141$ ,  $x = 0.321$  (Рис. 11) и имея значение  $p_{\phi\phi} = 0.0664326$ , он по мере роста  $\nu$  перемещается на поле координат по дугообразной траектории, а по абсолютной величине сначала уменьшается и при  $\nu = 0.406$  принимает минимальное значение  $p_{\phi\phi}(1.118, 0.57) = 0.065883$  (Рис. 25), после чего начинает увеличиваться; при  $\nu = 0.4468$  (Рис. 13) достигает оси симметрии на глубине  $x = 1.30791$  (здесь его величина  $p_{\phi\phi} = 0.072356$  равна величине  $p_{\phi\phi}$  непосредственно на самом источнике тепла), а с дальнейшим возрастанием  $\nu$  точка абсолютного максимума, скачком переместившаяся из начала координат на ось симметрии, приближается к источнику тепла вдоль этой оси; при этом значение максимума растяжения растёт и далее вплоть до предельной величины  $p_{\phi\phi}(0, 1.275) = 0.0895$  при  $\nu = \frac{1}{2}$ . Это показано на Рисунках 9 и 10.

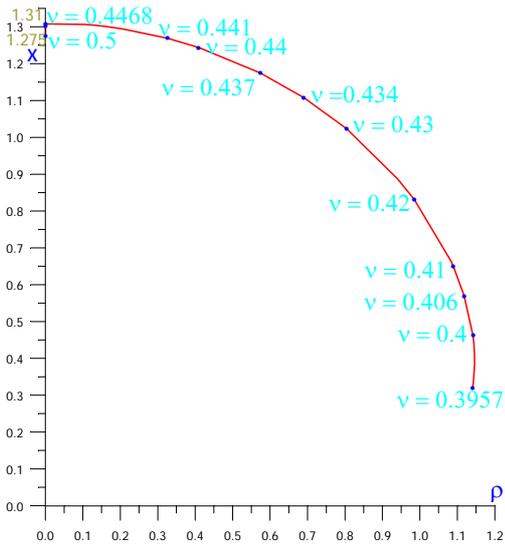


Рис.9. Положение точки дополнительного максимума окружного растяжения.

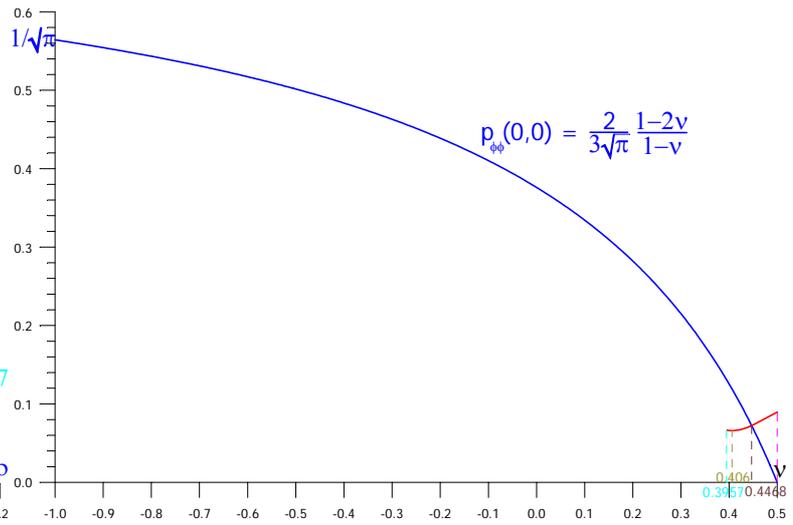


Рис. 10. Значение абсолютного и относительного максимумов  $p_{\phi}$  для различных значений  $\nu$ .

Положение точки максимума  $p_{\phi}$  на поле изобар для некоторых  $\nu$  представлено на Рис. 11-13.

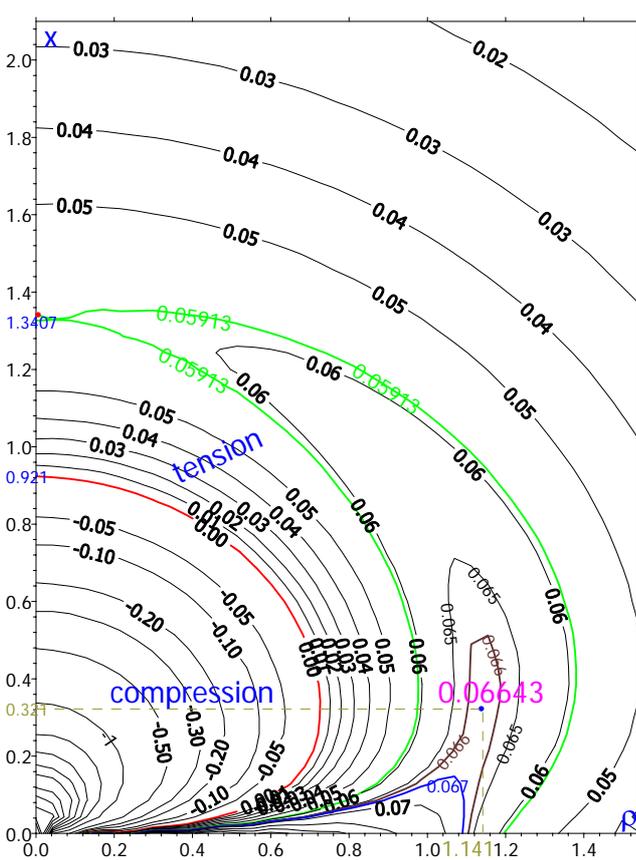


Рис.11 Изобары окружного напряжения при  $\nu = 0.3957$

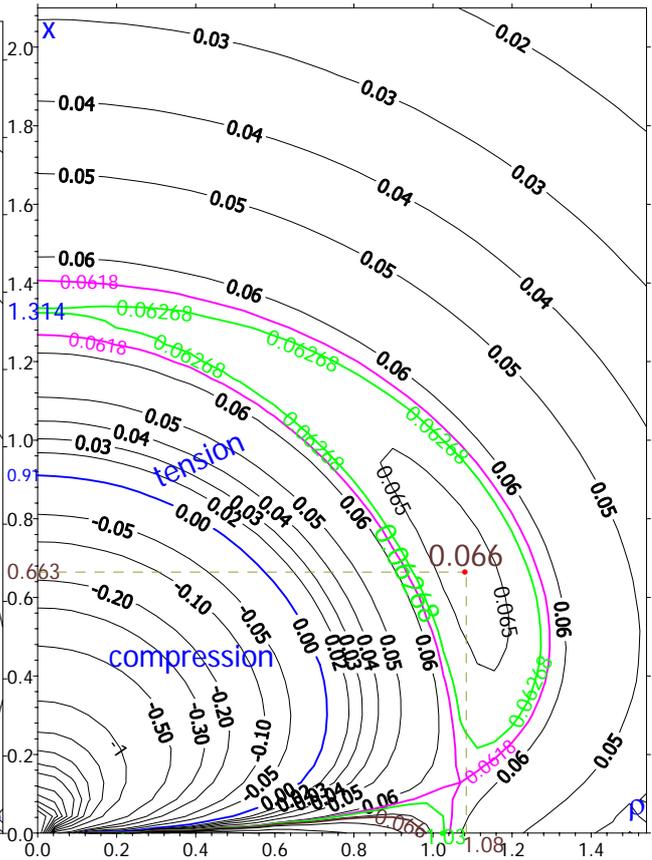


Рис.12 Изобары окружного напряжения при  $\nu = 0.4107$

Что касается изобар нулевого напряжения, то при любом  $\nu < 1/2$  они, начинаясь непосредственно на источнике тепла, сперва поворачиваются против часовой стрелки так, что свободная поверхность

является их касательной плоскостью (Рис. 14), а затем стремятся к общей для всех асимптоте  $x = \sqrt{2} \rho$ , как это и показано в [1–3], причём подходят к ней сверху. Область сжатия расположена слева. Вообще говоря, можно считать, что изобары  $p_{\phi\phi} = 0$  пересекаются также и в бесконечно удалённой точке ( $\rho \rightarrow \infty, x = \sqrt{2} \rho$ ).

Отметим, что при  $\nu = -1$  нулевая изобара, выходя из начала координат, монотонно удаляется как от свободной поверхности, так и от оси симметрии, стремясь к асимптоте.

При  $\nu = -0.325$  изобара  $p_{\phi\phi} = 0$  после выхода из источника тепла описывает против часовой стрелки дугу, напоминающую в плане четверть круга, достигает локального максимума удаления от оси симметрии в точке  $\rho = x = 0.75$ ; затем снова приближается к оси вплоть до точки с координатами  $\rho = 0.596, x = 1.62$ , после чего опять начинает удаляться от центра, стремясь к асимптоте.

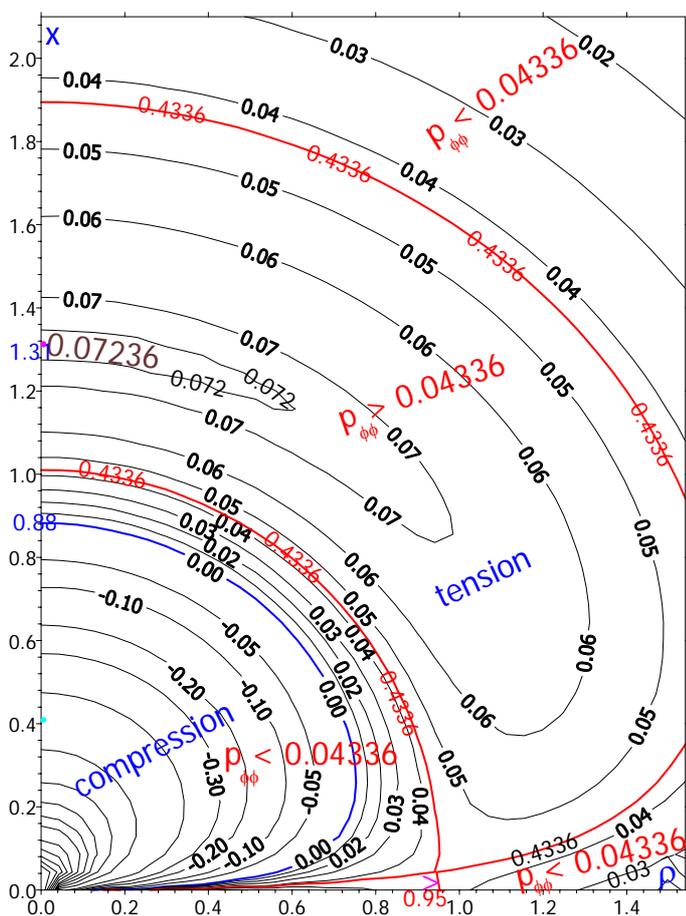


Рис.13 Изобары окружного напряжения при  $\nu = 0.4468$

Выход точки максимума  $p_{\phi\phi}$  на ось симметрии

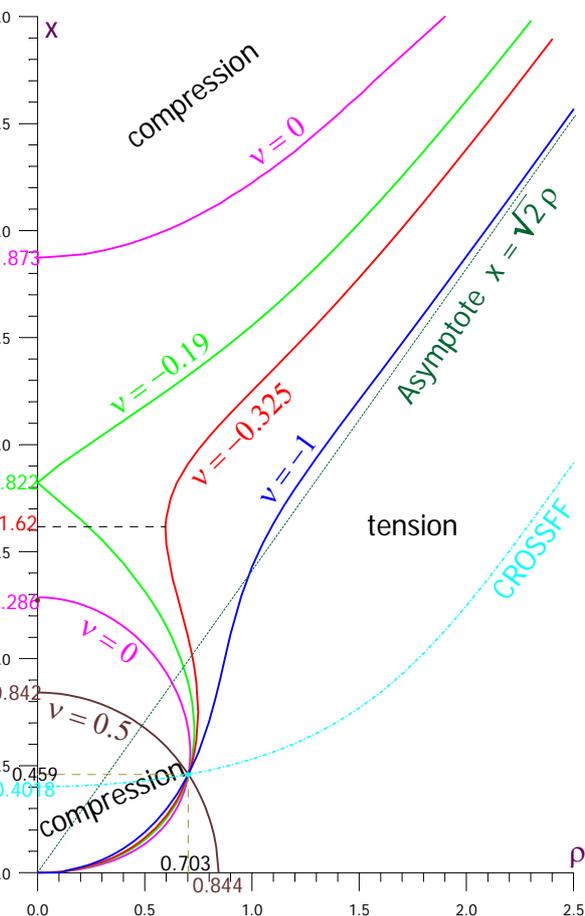


Рис.14 Изобары окружного напряжения

$p_{\phi\phi} = 0$  для различных значений  $\nu$ .

При  $\nu = -0.19$  изобара нулевого окружного напряжения, выходя из начала координат, описывает

дугу, напоминающую в плане сплюснутую в радиальном направлении полуокружность. Точка наибольшего удаления от оси симметрии при этом имеет координаты  $\rho = 0.73$ ,  $x = 0.663$ , а точка последующего выхода на эту ось по траектории пологой дуги находится на глубине  $x = 1.822$ . После этого изобара опять начинает удаляться от источника тепла, стремясь при этом к асимптоте.

В интервале  $-0.19 < \nu < \frac{1}{2}$  изобара  $p_{\varphi\varphi} = 0$  состоит из двух частей — конечной (нижней), начинающейся непосредственно на источнике тепла, описывающей плавную выпуклую линию, и выходящую на ось симметрии, и бесконечной (верхней), начинающейся несколько выше на оси симметрии и монотонно удаляющейся от начала координат, стремясь к асимптоте.

## 5. ЭФФЕКТ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ИЗОБАР

Обратим внимание на следующий любопытный факт, впервые замеченный в [4]. На рисунке 14 видно, что все изобары окружной компоненты  $p_{\varphi\varphi} = 0$ , соответствующие различным значениям коэффициента Пуассона, пересекаются в одной и той же точке, имеющей координаты  $\rho = 0.703$ ,  $x = 0.459$ . Попробуем теоретически доказать, что это действительно так. Для этого перегруппируем слагаемые в формулах (6) и (7) из [2], объединив члены, зависящие от величины  $\nu$ .

Тогда радиальное и окружное напряжения могут быть представлены в виде:

$$p_{\rho\rho}(\rho, x) = \frac{A_{\rho\rho}(\rho, x)}{1 - \nu} + B_{\rho\rho}(\rho, x) \quad , \quad p_{\varphi\varphi}(\rho, x) = \frac{A_{\varphi\varphi}(\rho, x)}{1 - \nu} + B_{\varphi\varphi}(\rho, x);$$

где  $A_{\rho\rho}$ ,  $A_{\varphi\varphi}$ ,  $B_{\rho\rho}$ ,  $B_{\varphi\varphi}$  — известные функции от пространственных автомодельных координат:

$$A_{\rho\rho}(\rho, x) = \int_0^{\infty} \exp(-2\lambda x) \left[ (1 - 2\lambda x) J_0(2\lambda\rho) + (1 + 2\lambda x) \frac{J_1(2\lambda\rho)}{2\lambda\rho} \right] f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2s} \left[ \frac{x^2 - 2\rho^2}{2s^4} f(s) - 2x^2 \frac{\operatorname{erfc}(s)}{s^2} \right],$$

$$A_{\varphi\varphi}(\rho, x) = \int_0^{\infty} \exp(-2\lambda x) \left[ 2J_0(2\lambda\rho) - (1 + 2\lambda x) \frac{J_1(2\lambda\rho)}{2\lambda\rho} \right] f(\lambda) d\lambda + \frac{f(s)}{4s^3} - \frac{\operatorname{erfc}(s)}{s},$$

$$B_{\rho\rho}(\rho, x) = -\frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \exp(-2\lambda x) J_1(2\lambda\rho) f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad B_{\varphi\varphi}(\rho, x) = -\int_0^{\infty} \exp(-2\lambda x) \left[ 2J_0(2\lambda\rho) - \frac{J_1(2\lambda\rho)}{\lambda\rho} \right] f(\lambda) d\lambda.$$

Распределение изолиний этих функций приведено на Рисунках 15-18.

Отсюда следует, что при выполнении для каждой из компонент условия  $A(\rho, x) = 0$ , определяющего в неявной интегральной форме кривую на координатной плоскости  $\{\rho, x\}$  (назовём её CROSSRR в случае радиального напряжения и CROSSFF — для окружного), исходная компонента  $p$

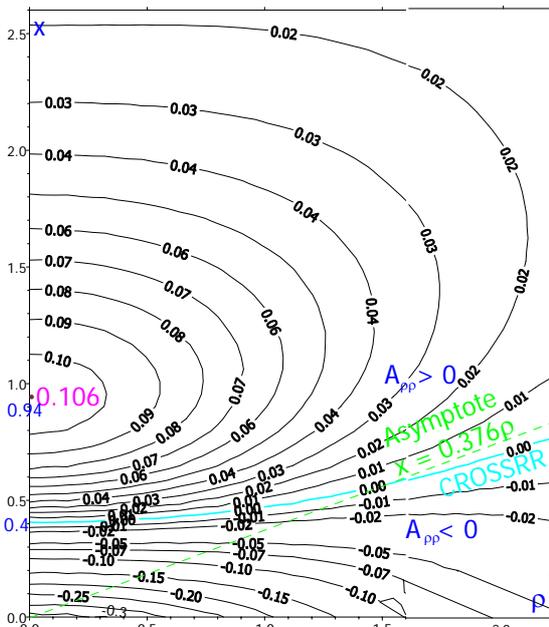


Рис.15. Изолинии функции  $A_{pp}$

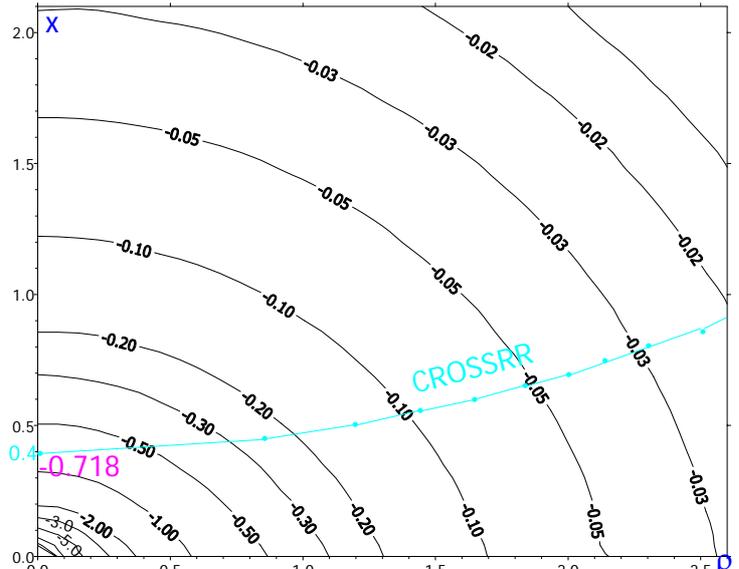


Рис.16. Изолинии функции  $B_{pp}$

перестаёт зависеть от величины  $\nu$ , так как в этом случае будет справедливо равенство  $p = B(\rho, x)$ .

Фактически это и означает, что любая пара координат  $(\rho, x)$ , которая удовлетворяет равенству  $A(\rho, x) =$

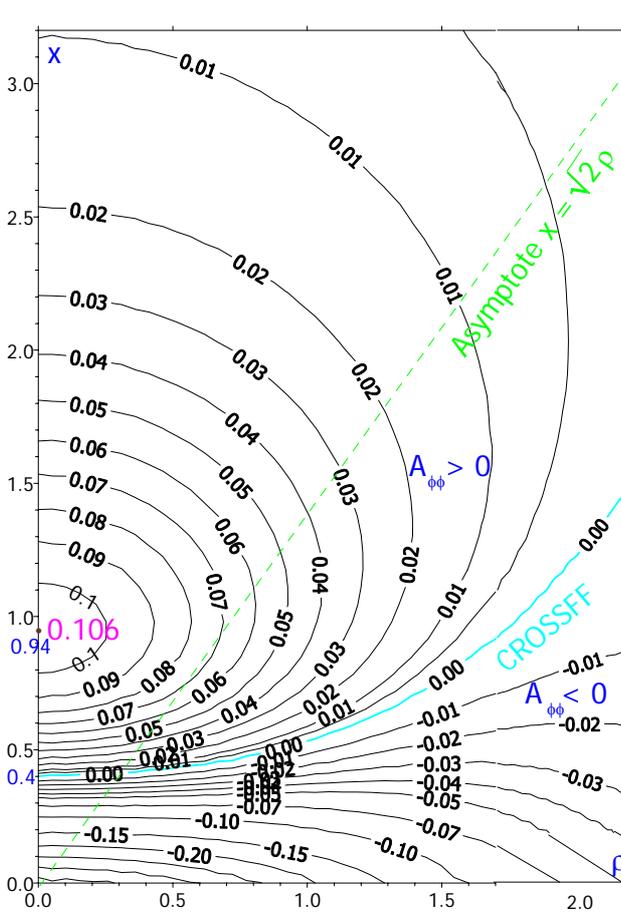


Рис. 17. Изолинии функции  $A_{\phi\phi}$

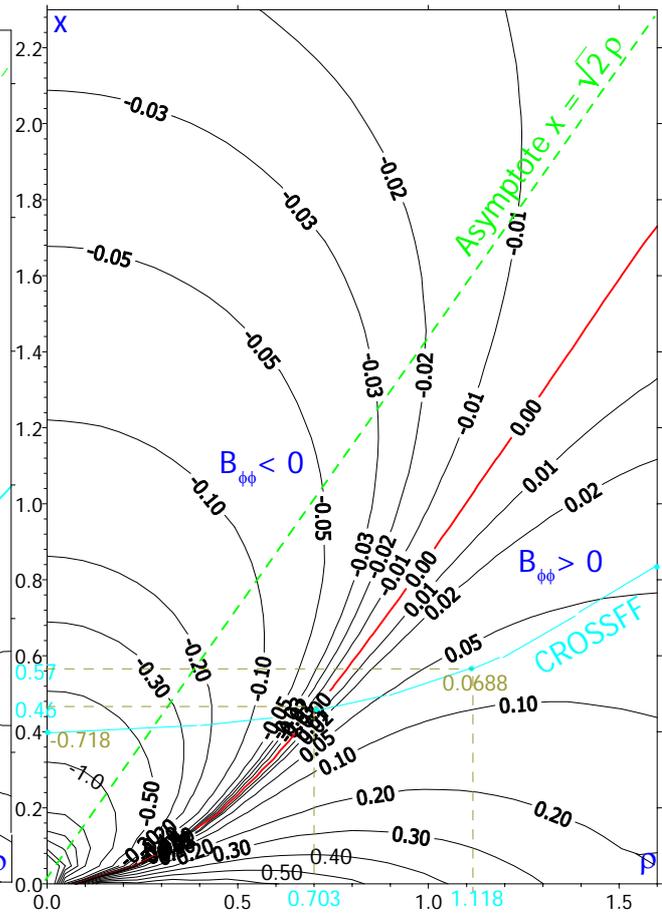


Рис. 18. Изолинии функции  $B_{\phi\phi}$

0, будет являться проекцией точки пересечения изобар на координатную плоскость. Ясно, что обнаруженное правило независимости относится к любым, а не только к нулевым изобарам.

Таким образом, совокупность двух указанных соотношений задаёт пространственную линию в декартовой системе координат  $\{\rho, x, p\}$  как пересечение трёхмерной поверхности  $p = B(\rho, x)$  и линейчатой поверхности  $A(\rho, x) = 0$ ,  $-\infty < p < \infty$ , перпендикулярной координатной плоскости. Каждая точка этой линии (назовём её линией пересечений изобар) соответствует конкретному значению напряжения, поэтому все изобары с такой же номинальной величиной  $p$ , (и, следовательно, лежащие в плоскости  $p = \text{const}$ ), но с различными  $v$ , будут проходить через эту точку.

Заметим, что одному и тому же значению какой-либо компоненты  $p = \text{const}$  могут соответствовать, вообще говоря, несколько точек, лежащих на линии пересечений, т.к. она не обязательно является монотонной и однозначной (ниже это будет показано на примере окружного напряжения).

Все три проекции пространственной линии пересечений для компонент  $p_{\rho\rho}$  и  $p_{\phi\phi}$  представлены на Рис. 19 (плоскости  $\{\rho, p\}$  и  $\{x, p\}$ ) и Рис. 20 (координатная плоскость  $\{\rho, x\}$ ). Заметим, что на Рис. 20 обе линии CROSSRR и CROSSFF приведены совместно, тогда как по отдельности первая из них

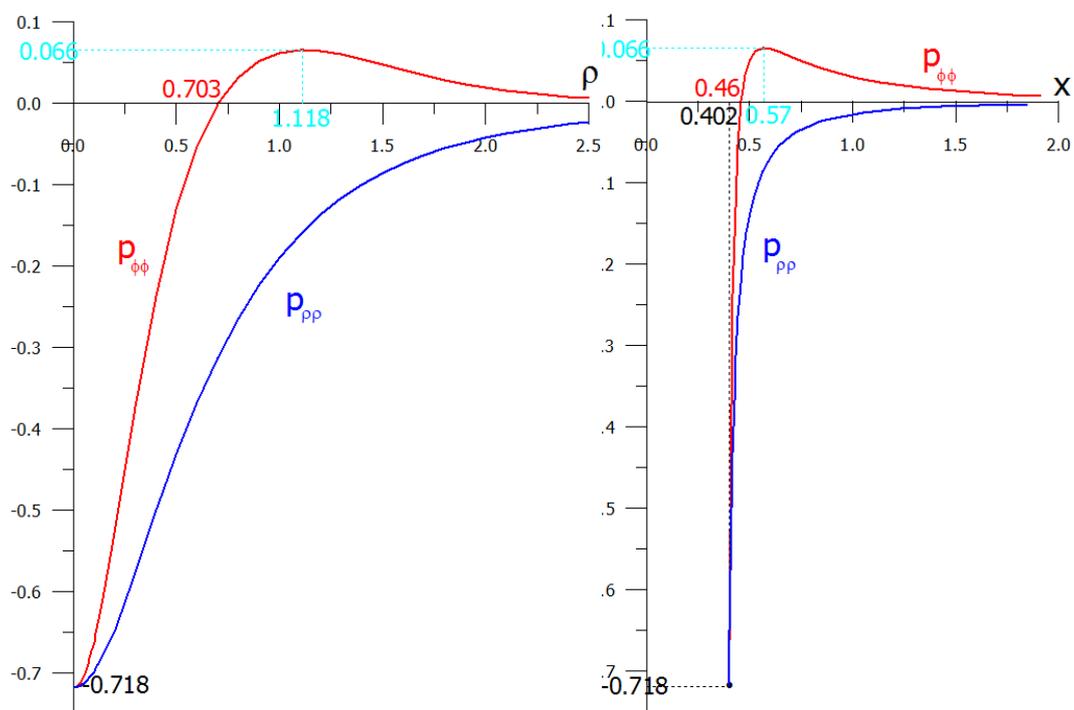


Рис.19. Проекция линий пересечений на плоскости  $\{\rho, p\}$  и  $\{x, p\}$ .

изображена голубым цветом на Рис. 15, а вторая — соответственно на Рис.17, где они являются изолиниями нулевого уровня. Обратим внимание на то, что CROSSFF лежит выше линии CROSSRR.

Расчёты показывают (см. Рис.19), что на линии пересечения изобар обе компоненты принимают минимальное значение  $p = -0.718$  в её начальной точке, лежащей на оси симметрии, на глубине  $x = 0.402$  (см. Рис. 2), где имеют место равенства  $A(0, 0.402) = 0$  и  $B(0, 0.402) = -0.718$ .

Вообще говоря, линия пересечений окружного напряжения определена в области  $\rho \geq 0, x \geq 0.402, -0.718 \leq p_{\phi\phi} \leq 0.066$ . Начинаясь в области сжатия, в точке  $(\rho = 0, x = 0.402, p_{\phi\phi} = -0.718)$ , она сначала поднимается, одновременно удаляясь как от оси симметрии, так и от свободной поверхности; затем меняет знак, проходя через точку  $(\rho = 0.703, x = 0.46, p_{\phi\phi} = 0)$ ; далее, продолжая возрастать уже в области растяжений, достигает максимума в точке  $(\rho = 1.118, x = 0.57, p_{\phi\phi} = 0.066)$ , после чего постепенно убывает до нуля по мере дальнейшего неограниченного удаления от центра (см. Рис.19).

Что касается линии пересечений радиального напряжения, то она определена в области  $\rho \geq 0, x \geq 0.402, -0.718 \leq p_{\rho\rho} \leq 0$ . Выходя из той же самой начальной точки, монотонно возрастая и асимптотически стремясь к нулю с удалением от начала координат, она целиком располагается в зоне сжатия (см. Рис.19,20).

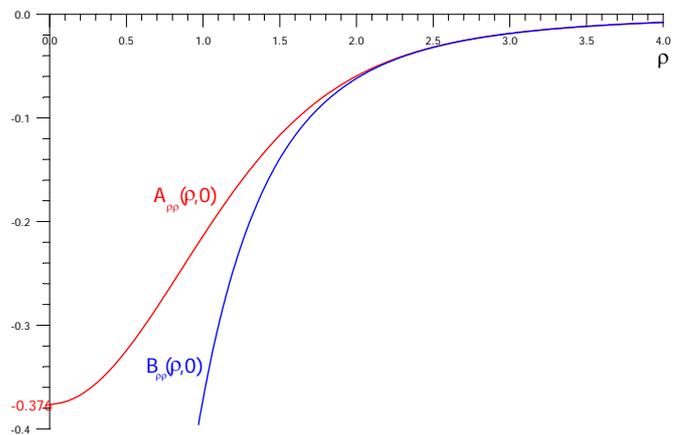
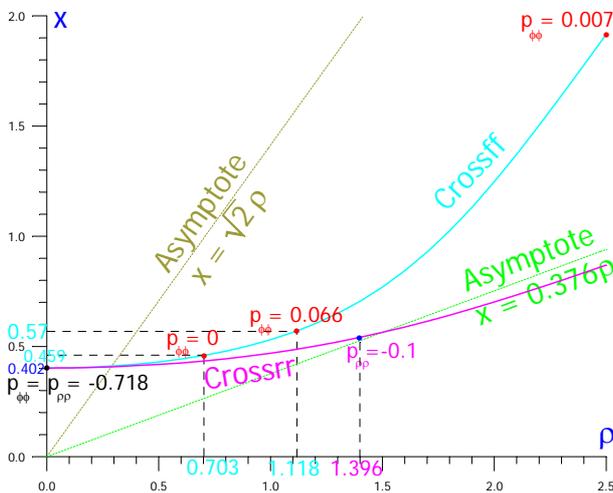


Рис. 20 Проекция линий пересечений на плоскость  $\{\rho, x\}$  Рис. 21 Функции  $A_{\rho\rho}$  и  $B_{\rho\rho}$  на свободной поверхности

Заметим, кстати, что при  $\rho = 0$  выражения для обеих компонент упрощаются (см. формулу (10) в [2]), а функции  $A$  и  $B$  могут быть записаны в явной форме:

$$A(0, x) = \frac{1}{2x} \left\{ \frac{1}{2x^2} [\operatorname{erf}(x) - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)] - \operatorname{erfc}(x) - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} + (2x^2 + 1)\exp(x^2)\operatorname{erfc}(x) \right\},$$

$$B(0, x) = \frac{1}{2x} \left[ \frac{1}{x^2} \left( \frac{2x}{\sqrt{\pi}} - 1 \right) + \left( \frac{1}{x^2} - 2 \right) \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) \right].$$

Асимптотическое разложение обеих функций на оси симметрии даёт приближённые формулы:

$$A(0, x \ll 1) \approx -\frac{2}{3\sqrt{\pi}} + 1.5x \quad , \quad B(0, x \ll 1) \approx -\frac{1}{2x} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}}.$$

Величина  $A(0, x)$  имеет максимум  $A(0, 0.9385) = 0.10617$ .

Осевая координата упомянутой ранее начальной точки обеих линий пересечения определяется из численного решения трансцендентного уравнения  $A(0, x) = 0$ , имеющего корень  $x = 0.402$ , а значение напряжения в этой точке — из соотношения  $B(0, 0.402) = -0.718$ .

Распределение функций  $A(0, x)$  и  $B(0, x)$  вдоль оси симметрии представлено на Рис.22.

В свою очередь, на свободной поверхности  $x = 0$ , функции  $A$  и  $B$  также выражаются в явной форме (см. выражения (8) и (9) в работе [2]) и имеют следующий вид:

$$A_{\rho\rho}(\rho, 0) = A_{\phi\phi}(\rho, 0) = -\frac{1}{2} B_{\phi\phi}(\rho, 0) = -\frac{1}{\rho^2} \left[ \frac{\operatorname{erf}(\rho)}{2\rho} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\rho^2) \right],$$

$$B_{\rho\rho}(\rho, 0) = -\frac{1}{\rho} \left\{ \operatorname{erfc}(\rho) + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\operatorname{erf}(\rho)}{2\rho} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\rho^2) \right] \right\}.$$

Можно рассчитать их асимптотические разложения вблизи начала координат

$$A_{\rho\rho}(\rho \ll 1, 0) = A_{\phi\phi}(\rho \ll 1, 0) \approx -\frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{3}{5} \rho^2 \right) \quad , \quad B_{\rho\rho}(\rho \ll 1, 0) \approx -\frac{1}{\rho} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}}$$

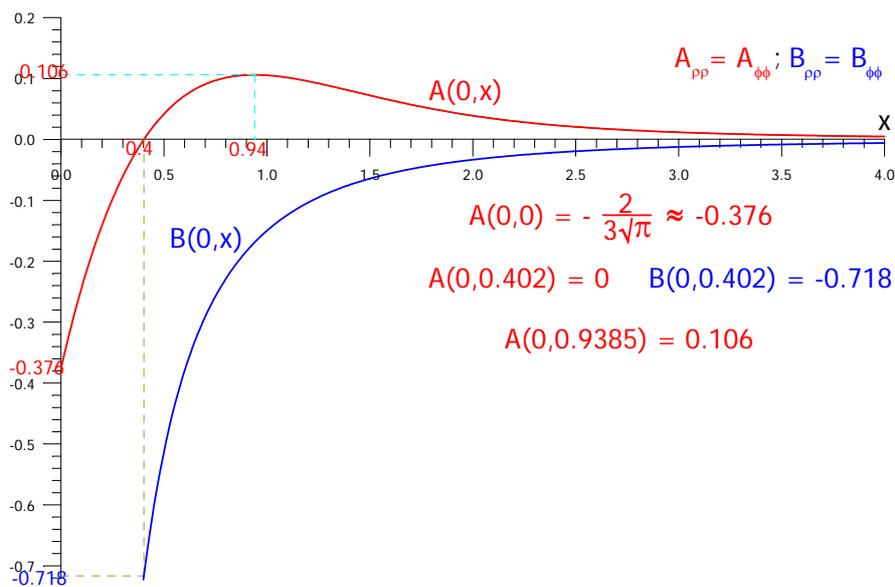


Рис. 22. Функции  $A_{\rho\rho}$ ,  $A_{\phi\phi}$ ,  $B_{\rho\rho}$ , и  $B_{\phi\phi}$  на оси симметрии

Также можно получить в явной форме приближённые выражения для функций  $A$  и  $B$  в начале нагрева либо на большом удалении от источника тепла, подставляя соотношения  $f(\lambda) \approx 2\lambda^2$ ,  $f(s) \approx 1$  в соответствующие формулы. При этом все интегралы вычисляются в замкнутом виде.

$$A_{pp}(\rho \gg 1, x \gg 1) = \frac{1}{4s^7} (x^4 + 14x^2\rho^2 - 2\rho^4) = \frac{1}{4s^7} [(x^2 + 7\rho^2)^2 - 51\rho^4] \quad , \quad B_{pp}(\rho \gg 1, x \gg 1) = -\frac{1}{2s^3} ;$$

$$B_{\phi\phi}(\rho \gg 1, x \gg 1) = -2A_{\phi\phi}(\rho \gg 1, x \gg 1) = \frac{1}{2s^5} (2\rho^2 - x^2).$$

Отсюда видно, что асимптота, к которой линия  $A_{pp}(\rho, x) = 0$  (т.е. CROSSRR) стремится по мере удаления от источника тепла, определяется из биквадратного уравнения и имеет вид  $x = \sqrt{\sqrt{51} - 7} \rho \approx 0.376\rho$  (см. Рис. 15,20); в свою очередь для линии  $A_{\phi\phi}(\rho, x) = 0$  (т.е. CROSSFF), как впрочем, и для  $B_{\phi\phi}(\rho, x) = 0$ , соответствующая асимптота описывается уравнением  $x = \sqrt{2} \rho \approx 1.414\rho$  (см. Рис. 17,18,20); что же касается функции  $B_{pp}(\rho, x)$ , то она всюду отрицательна и у неё нет нулевых асимптот.

Изолинии поля  $B_{pp}(\rho, x)$  вблизи источника тепла имеют в плане форму парабол  $x + \rho^2 = \varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll 1$ , тогда как на большом удалении от него — форму окружностей  $x^2 + \rho^2 = \Delta$ , где  $\Delta \gg 1$  (см. Рис.16).

Таким образом, построенные в координатной плоскости  $\{\rho, x\}$  линии CROSSRR и CROSSFF, начинаясь на оси симметрии, в точке, лежащей на глубине  $x = 0.402$ , монотонно удаляются как от этой оси, так и от свободной поверхности, стремясь при  $\rho \rightarrow \infty$  каждая к своей асимптоте, которые наклонены к границе полупространства под углами  $20.61^\circ$  и  $54.74^\circ$  соответственно (см. Рис.17).

Далее приведём иллюстрации и описания пересечений изобар обеих компонент для некоторых характерных значений напряжения.

### 5.1 Пересечение изобар окружного напряжения

1. При любых значениях  $\nu$ , изобары максимально возможного сжатия на линии пересечений  $p_{\phi\phi} = -0.718$ , выходят из начала координат, касаясь свободной поверхности, затем описывают против часовой стрелки кривую, в плане напоминающую сплюснутую полуокружность, и заканчиваются на оси  $\rho = 0$ , на глубине  $x = 0.4$ , мало отличаясь по форме одна от другой). Точки максимального удаления от оси симметрии для предельных значений коэффициента Пуассона имеют координаты:  $\rho = 0.24$ ,  $x = 0.19$  при  $\nu = -1$  и  $\rho = 0.2882$ ,  $x = 0.1723$  при  $\nu = 1/2$  (см. Рис. 23)

2. Что касается изобар  $p_{\text{фф}} = 0.065883$ , пересекающихся в точке  $\rho = 1.118$ ,  $x = 0.57$ , и соответствующих максимальному окружному растяжению на линии пересечений, то картина их распределения имеет более сложный характер. Прежде всего отметим, что при  $\nu < 0.406$  эти изобары целиком лежат ниже линии CROSSFF, причём в интервале значений коэффициента Пуассона  $-1 \leq \nu \leq 0.39$  они имеют вид плавных кривых, выходящих из начала координат, и удаляющихся одновременно как от оси симметрии, так и от границы полупространства; затем все они касаются линии CROSSFF при  $\rho = 1.118$ ,  $x = 0.57$  и заканчиваются на свободной поверхности в точках с координатами  $\rho = 2.2355$  ( $\nu = -1$ ),  $\rho = 1.925$  ( $\nu = 0$ ) и  $\rho = 1.142$  ( $\nu = 0.39$ ) соответственно (см. Рис. 24).

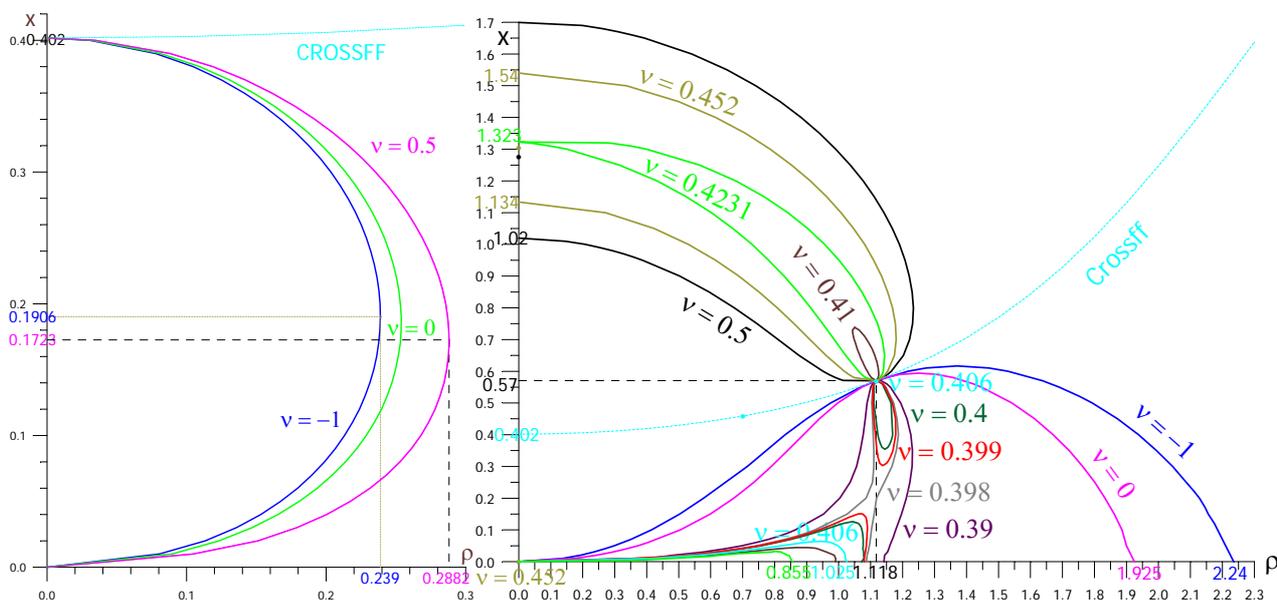


Рис. 23. Изобары окружного напряжения  $p_{\text{фф}}(\rho, x) = -0.718$  для различных значений  $\nu$ .

Рис. 24. Изобары окружного напряжения  $p_{\text{фф}}(\rho, x) = 0.065883$  для различных значений  $\nu$ .

По мере дальнейшего возрастания величины  $\nu$ , расстояние между частями изобары, прилегающими к CROSSFF слева и справа от точки пересечения становится всё меньше и при значениях  $\nu > 0.39$  на контуре изобары формируется узкое горлышко (шейка), которая исчезает при  $\nu = 0.398$ , когда обе части смыкаются в точке  $\rho = 1.1$ ,  $x = 0.2$ ; далее изобара  $p_{\text{фф}} = 0.066$  теряет сплошность и при  $\nu = 0.399$  разделяется на две ветви, одна из которых по-прежнему выходит из центра, слегка отклоняясь от свободной поверхности по мере увеличения радиальной координаты, а затем резко опускается вниз, заканчиваясь в точке  $\rho = 1.08$ ,  $x = 0$ ; тогда как другая ветвь, выходит непосредственно из точки  $\rho = 1.118$ ,  $x = 0.57$  и, описав узкую замкнутую кривую, лежащую ниже

линии CROSSFF, возвращается обратно.

При последующем увеличении  $\nu$  обе ветви изобар становятся всё короче, а расстояние между ними — всё больше, причём нижняя ветвь фактически примыкает к свободной поверхности, тогда как верхняя, сохраняя форму вытянутой замкнутой линии, монотонно сжимается, вырождаясь при  $\nu = 0.406$  в точку с координатами  $\rho = 1.118, x = 0.57$ , лежащую на линии CROSSFF (Рис.25). При  $\nu > 0.406$  эта ветвь вновь начинает расти, но располагается уже целиком сверху от CROSSFF; поначалу она имеет форму узкой замкнутой кривой, изогнутой в направлении сторону оси симметрии, а по мере дальнейшего роста величины  $\nu$  верхняя ветвь изобары становится всё длиннее и шире и при достижении значения  $\nu = 0.4231$  она касается оси симметрии в точке, лежащей на глубине  $x = 1.323$ .

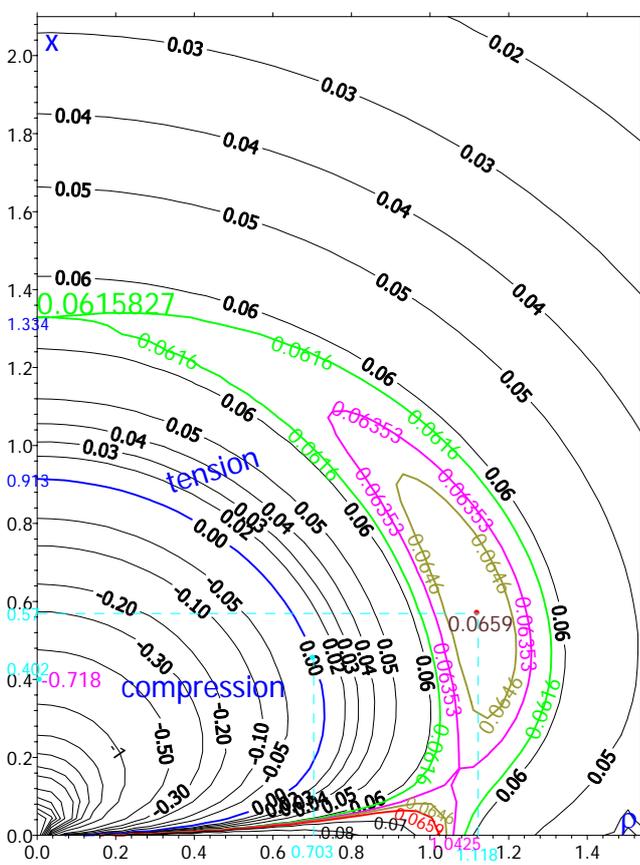


Рис.25 Изобары окружного напряжения при  $\nu = 0.406$

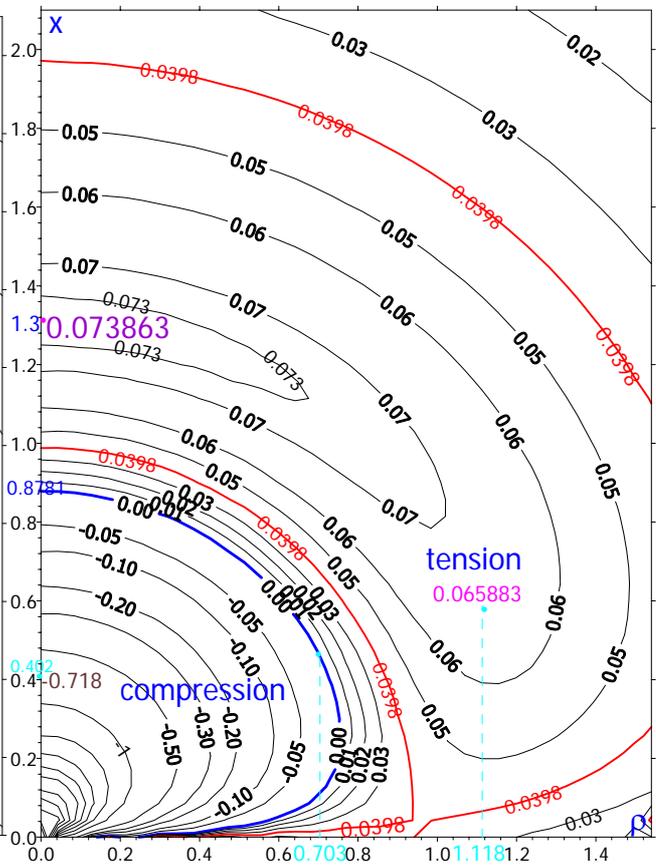


Рис.26 Изобары окружного напряжения при  $\nu = 0.452$

При ещё больших значениях коэффициента Пуассона эта ветвь принимает форму плавной разомкнутой кривой, начинающейся и заканчивающейся на оси симметрии и при этом проходящей через точку  $\rho = 1.118, x = 0.57$  на линии CROSSFF; причём интервал между концами изобары на оси симметрии монотонно возрастает с ростом  $\nu$ . Для предельного значения  $\nu = 1/2$ , начало и конец

изобары находятся на глубине  $x = 1.02$  и  $x = 1.7$  соответственно.

Что касается нижней, выходящей из начала координат ветви изобар, то она существует только для значений  $v < 0.452$  (Рис.26), т.к. только в этом диапазоне выполняется неравенство  $p_{\text{фф}}(0,0) > 0.066$ . Монотонно сжимаясь с увеличением  $v$ , эта ветвь заканчивается на свободной поверхности в точках с координатами  $\rho = 1.09$  ( $v = 0.398$ ),  $\rho = 1.08$  ( $v = 0.399$ ),  $\rho = 1.07$  ( $v = 0.4$ ),  $\rho = 1.025$  ( $v = 0.406$ ),  $\rho = 0.99$  ( $v = 0.41$ ),  $\rho = 0.855$  ( $v = 0.423$ ), а при  $v = 0.452$  нижняя ветвь вырождается в точку  $\rho = x = 0$ .

Отметим, что в диапазоне положительных значений окружного напряжения, т.е. в области  $\rho > 0.703$ ,  $x > 0.459$ ,  $0 < p_{\text{фф}} < 0.0659$  любому значению  $p_{\text{фф}} = \text{const}$  всегда соответствуют две точки на линии пересечений, причём левая точка лежит в конечном интервале  $0.703 < \rho < 1.118$ ,  $0.459 < x < 0.057$ , тогда как правая — в полуограниченной области  $\rho > 1.118$ ,  $x > 0.57$ .

3. В качестве ещё одной иллюстрации рассмотрим картину пересекающихся изобар, относящихся к величине  $p_{\text{фф}} = 0.033$ . Как следует из Рис.19, этому значению окружной компоненты соответствуют две точки на линии CROSSFF: левая —  $\rho = 0.803$ ,  $x = 0.479$  и правая —  $\rho = 1.735$ ,  $x = 0.96$ .

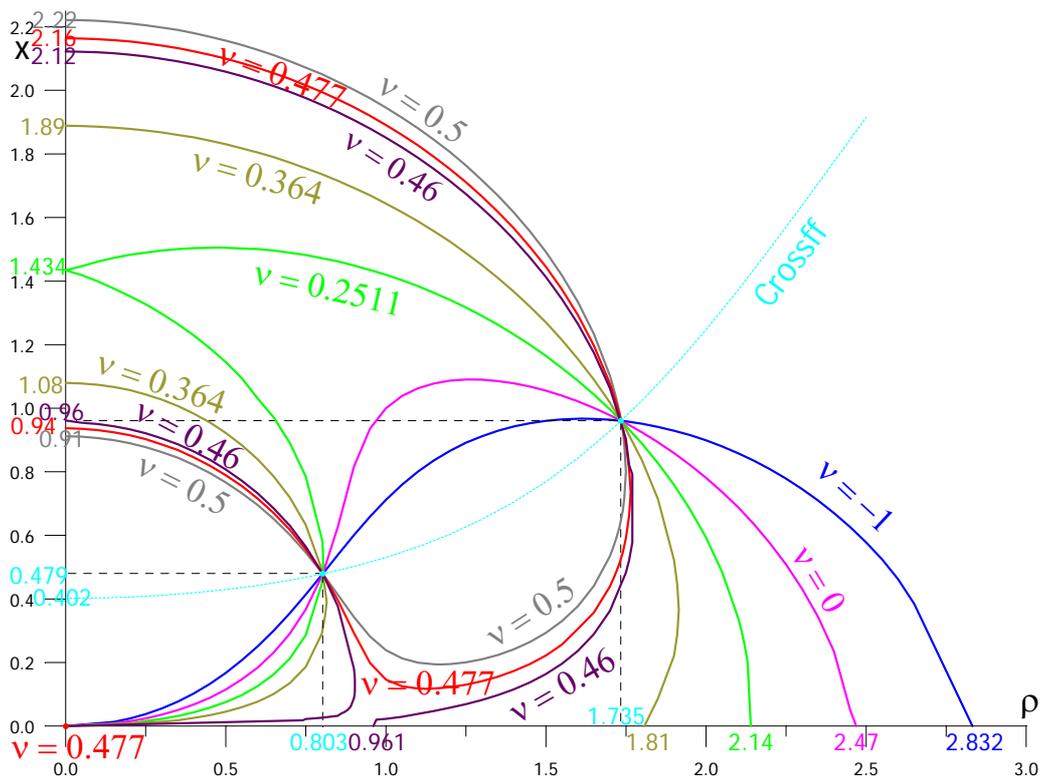


Рис.27 Изобары окружного напряжения  $p_{\text{фф}} = 0.33$  для различных  $v$ .

Из Рис.27 видно, что в диапазоне  $-1 \leq v < 0.2511$  изобары состоят из единственной ветви. Она выходит из начала координат, пересекает линию CROSSFF сначала снизу вверх в левой точке, а

затем сверху вниз в правой точке и заканчивается на свободной поверхности. При  $v = 0.2511$  изобара достигает оси симметрии в точке, лежащей на глубине  $x = 1.434$ , а при  $v > 0.2511$  разделяется на две ветви. Первая, выходя непосредственно из источника тепла, поворачивается против часовой стрелки, проходит через левую точку на CROSSFF и заканчивается на оси симметрии при  $x < 1.434$ .

Вторая ветвь, начинаясь на оси симметрии при  $x > 1.434$ , проходит через правую точку на CROSSFF и заканчивается на свободной поверхности. По мере увеличения  $v$  конечная точка этой ветви приближается к началу координат и при  $v = 0.477$  обе ветви опять смыкаются. При этом источник тепла остаётся изолированной точкой, в которой  $p_{\text{фф}} = 0.033$ . С дальнейшим ростом значения  $v$  изобары, начинаясь и заканчиваясь на оси симметрии, пересекают линию CROSSFF сначала сверху вниз, а затем снизу вверх, причём глубина начальной точки монотонно убывает вплоть до  $x = 0.91$  при  $v = 1/2$ , а глубина конечной — монотонно возрастает вплоть до  $x = 2.22$  при  $v = 1/2$ .

Заметим, что для каждого конкретного окружного напряжения  $p$  из диапазона пересечений  $-0.718 \leq p_{\text{фф}} \leq 0.066$ , все изобары, у которых величина коэффициента Пуассона, удовлетворяет

неравенству  $-1 \leq v < \frac{\frac{2}{3\sqrt{\pi}} + p}{\frac{4}{3\sqrt{\pi}} - p}$ , будут выходить из начала координат, т.е. в этом интервале значений

$v$  источник тепла будет являться дополнительной точкой пересечения изобар. Отсюда следует, в частности, что для всех напряжений, лежащих в области сжатия  $-0.718 \leq p_{\text{фф}} < 0$  изобары, соответствующие любым значениям  $v$  выходят из начала координат. Для нулевых изобар это интервал  $-1 \leq v < 1/2$  (Рис. 14); для  $p_{\text{фф}} = 0.033$  — интервал  $-1 \leq v < 0.477$  (Рис. 27), а для  $p_{\text{фф}} = 0.066$  — интервал  $-1 \leq v < 0.452$  (Рис. 24). Пересечение изобар при  $p = x = 0$  объясняется неоднозначностью окружного напряжения в начале координат обнаруженной в [1,2]. Это является неустранимым дефектом модели точечного источника тепла.

## 5.2 Пересечение изобар радиального напряжения

В качестве иллюстрации рассмотрим две точки, лежащие на линии пересечений — начальную и промежуточную, соответствующую значению  $p_{\text{рр}} = -0.1$  (для всех других промежуточных точек результаты качественно будут такие же). Изобары  $p_{\text{рр}} = -0.718$ , выходящие из начальной точки линии

CROSSRR, лежащей на оси симметрии на глубине  $x = 0.402$ , описывают кривую, напоминающую параболу и заканчиваются на свободной поверхности (см. Рис.28).

Ограничимся описанием двух изобар, соответствующих предельным значениям коэффициента Пуассона:  $\nu = -1$  и  $\nu = 1/2$ . Первая из них выходит на свободную поверхность в точке с радиальной координатой  $\rho = 0.8$ , а вторая — в точке  $\rho = 1.07$ . Ясно, что все изобары из интервала  $-1 < \nu < 1/2$  будут располагаться между ними.

Что касается точки  $\rho = 1.4$ ,  $x = 0.54$ , лежащей на линии CROSSRR и соответствующей величине  $p_{pp} = -0.1$ , то изобары, проходящие через неё, также имеют форму парабол, начинающихся на оси симметрии и заканчивающихся на свободной поверхности. В частности, при  $\nu = -1$  изобара начинается на глубине  $x = 0.99$  и заканчивается в точке  $\rho = 1.94$ , тогда как при  $\nu = 1/2$  — начинается на глубине  $x = 0.71$  и заканчивается в точке  $\rho = 2.462$ . Изобары, относящейся к промежуточным значениям  $\nu$  будут располагаться между ними.

Примеры пересекающихся изобар для некоторых значений  $p_{pp}$  приведены на Рис. 28

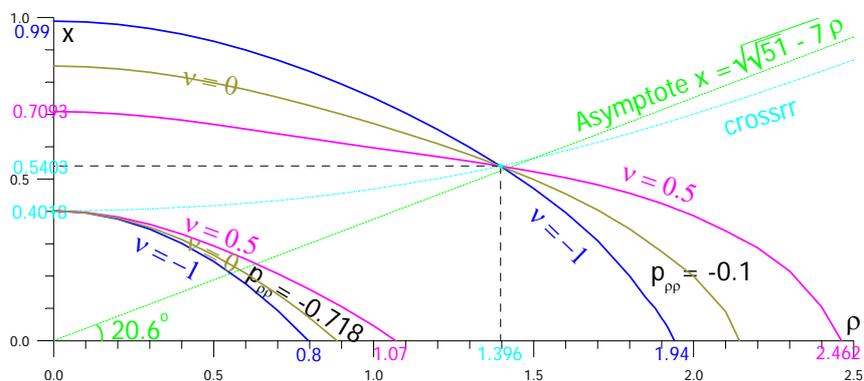


Рис.28 Пересечение изобар радиального напряжения.

Обратим внимание на то, что тангенс угла  $\beta$  между касательной к кривой  $A(\rho, x) = 0$  в каждой её точке и свободной поверхностью  $x = 0$  находится по формулам для неявной функции

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dx}{d\rho} = -\frac{\partial A / \partial \rho}{\partial A / \partial x}.$$

С другой стороны, так как уравнение любой изобары радиального и окружного напряжения при

каждом заданном  $\nu$  можно записать в виде  $p(\rho, x) = \frac{A(\rho, x)}{1 - \nu} + B(\rho, x) = \text{const}$ , ясно, что вдоль неё будет

выполняться соотношение  $dp = \left( \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{\partial B}{\partial \rho} \right) d\rho + \left( \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) dx = 0$ , а тангенс угла  $\gamma$  наклона

между касательной к этой изобаре и свободной поверхностью равен  $\operatorname{tg}\gamma = \frac{dx}{d\rho} = - \frac{\frac{1}{1-\nu} \frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{\partial B}{\partial \rho}}{\frac{1}{1-\nu} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x}}$ .

Отметим следующий любопытный факт. В точке пересечения изобар, соответствующих какому-либо конкретному значению  $p$ , эти изобары, лежащие в плоскости  $p = \text{const}$ , имеют, вообще говоря, произвольные углы наклона касательной  $\gamma$  в зависимости от величины  $\nu$  для каждой из них, что хорошо видно, например, на Рисунках 14 и 27, а также для точки  $p_{pp} = -0.1$  на Рис. 28.

Однако в тех случаях, когда напряжение  $p$  на пространственной линии пересечений  $\{A(\rho, x) = 0, p = B(\rho, x)\}$  достигает экстремальных значений (см. Рис. 19, значения  $p_{pp} = p_{\text{фф}} = -0.718$  и  $p_{\text{фф}} = 0.0659$ ), все изобары с любыми  $\nu$ , соответствующие этим экстремумам  $p$ , будут иметь в точке пересечения одинаковые углы наклона касательной  $\gamma$ , совпадающие также и с углом  $\beta$  наклона касательной к

самой линии  $A(\rho, x) = 0$ . Действительно, в точке экстремума напряжения  $p$  выполняются условия  $\frac{\partial B}{\partial \rho}$

$= \frac{\partial B}{\partial x} = 0$ . Подставляя оба эти соотношения в выражение для  $\operatorname{tg}\gamma$ , приведённое выше, получаем

равенство  $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\beta$ . Таких экстремальных точек всего три: точка минимума для  $p_{pp}$  (Рис. 28:  $\rho = 0, x = 0.402$ ) и точки минимума и максимума для  $p_{\text{фф}}$  (Рис. 23:  $\rho = 0, x = 0.402$  и Рис. 24).

## 6. ВЫВОДЫ

Для всех возможных значений  $\nu$  исследовано точное аналитическое решение пространственной осесимметричной задачи квазистатической линейной термоупругости о распределении температурных напряжений в полупространстве нагреваемом поверхностным источником тепла постоянной интенсивности.

Изучено влияние коэффициента Пуассона на конфигурацию нулевых изобар радиального и окружного напряжений, разделяющих области растяжения и сжатия. Для каждой такой изобары теоретически определены асимптоты. Анализ построенных точных математических выражений

показывает, что для материалов, у которых  $-1 \leq \nu \leq -0.7$ , в полупространстве возможно только радиальное сжатие, а на оси симметрии радиальное и окружное растяжение появляется лишь при  $\nu > -0.19$ .

Для каждой из компонент определены экстремальные значения а также приведены графики как перемещения точек экстремумов на координатном поле, так и соответствующих изменений их величины.

Как для радиальной, так и для окружной компонент доказано существование поверхностей вращения, вдоль которых у каждой из них исчезает зависимость от коэффициента Пуассона, т. е. все изобары, имеющие произвольные значения  $\nu$  будут проходить через определённую круговую линию на этой поверхности, соответствующую заданному уровню напряжения. В неявном виде определена форма этих поверхностей, найдены интервалы напряжений и координат, внутри которых наблюдается подобный эффект. Поверхность пересечений радиальной компоненты целиком лежит в области отрицательных напряжений, а аналогичная поверхность окружной компоненты имеет участки как растяжения, так и сжатия. Для обеих компонент рассмотрены и проиллюстрированы конкретные примеры пересечения изобар при некоторых значениях напряжения.

Приведённые рассуждения об условиях независимости тех или иных переменных от величины  $\nu$ , изложенные выше применительно к отдельным компонентам термоупругого поля, таким как  $p_{rr}$  и  $p_{\phi\phi}$ , допускают естественное обобщение и на их линейные комбинации.

Как отмечено в работе [5], эффект пересечений изобар будет иметь место также и в аналогичных неавтомоделных задачах о нагреве тел с произвольным распределением тепла на границе, но при этом форма поверхностей пересечения будет меняться с течением времени.

## Список литературы

1. Пинскер В.А. Квазистатические термоупругие поля в полуограниченном теле, нагреваемом точечным поверхностным источником тепла постоянной мощности. Труды 4-й РНКТ, М.: Изд-во МЭИ, 2006. т.7 с. 302-305.
2. Пинскер В.А. Квазистатические термоупругие напряжения в полупространстве, нагреваемом точечным поверхностным источником тепла постоянной мощности // ММФ-2008: VI Минский

международный форум по тепло- и массообмену (19-23 мая 2008 г.): Труды / Институт тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова НАН Беларуси. Минск, 2008. Секция 3. Доклад 3-17.

3. Goldstein R.V., Pinsker V.A. Uncoupled Quasi-Steady Thermoelastic Stresses in Semispace Heated by Surface Point-Like Heat Source. Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Congress on Thermal Stresses TS2009, June 1-4, 2009 University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, USA, vol. 1, ed by M. Ostoj-Starzewsky, P. Marzocca.

4. Пинскер В.А. Поля термических напряжений в полуограниченном упругом теле, нагреваемом точечным непрерывным источником тепла, расположенным на поверхности. // РНКТ-5: V Российская национальная конференция по теплообмену (25-29 октября 2010 г.): Труды / Издательский дом МЭИ. Москва, 2010. Т. 7. С. 161-165.

5. Пинскер В.А. Термонапряжения в полуограниченном упругом теле нагреваемом точечным поверхностным источником тепла. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер.: Механика деформируемого твёрдого тела. 2011. Т. 4, № 4. С. 1705–1707.