УДК 539.2

РАСЧЁТ ПОЛЕЙ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В МАССИВНОМ ТЕЛЕ ПРИ НАГРЕВЕ ЕГО ГАУССОВЫМ ПОТОКОМ ТЕПЛА

В.А. Пинскер

ОАО «Корпорация «ВНИИЭМ», г. Москва, Россия

Victorp2009@yandex.ru

АННОТАЦИЯ

В интегральном виде получено точное аналитическое решение задачи линейной несвязанной термоупругости. Рассмотрены важные частные случаи, при которых температурное поле и компоненты тензора напряжений принимают более простой вид. Исследованы асимптотики найденных выражений при малых и больших значениях безразмерного времени, вблизи и вдали от источника тепла. В замкнутом виде построены приближённые распределения осевой и сдвиговой компонент в начале нагрева. Найдены максимальные значения всех компонент термоупругого поля при различных значениях коэффициента Пуассона. Изучены законы перемещения нулевых изобар с течением времени. На свободной поверхности обнаружена независимость разности окружной и радиальной компонент от величины коэффициента Пуассона. Показано, что при стационарном плосконапряжённом состоянии в нагреваемом полупространстве возможны только сжимающие напряжения, а распределение окружной компоненты по глубине носит немонотонный характер. Определен нестационарный деформационный профиль свободной границы и в явном виде найдена его предельная форма. В центральной точке аналитически рассчитаны осевое смещение и кривизна поверхности. Исследована возможность механических разрушений в нагреваемом теле.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что поверхностный нагрев твердых упругих тел приводит к возникновению в них нестационарных температурных полей, что в свою очередь вызывает появление термических напряжений, также развивающихся во времени. Анализ и описание термонапряжённого состояния таких тел является важной и актуальной научной проблемой и представляет значительный интерес для различных областей техники и технологии.

Во многих реальных случаях, встречающихся при поверхностном нагреве массивных твёрдых тел, непрерывный тепловой поток постоянной мощности, плотность которого максимальна в центре и убывает с удалением от него, можно представить в виде тонкого источника тепла с гауссовым распределением интенсивности. Такие источники формируются, например, в процессе индукционного нагрева, а также при воздействии лазерных, плазменных или электронных пучков.

В работе рассматривается нестационарная осесимметричная задача о температурном поле и несвязанных полях термических напряжений в однородном и изотропном линейно-упругом полупространстве, нагреваемом непрерывным тепловым потоком, падающим на его поверхность и распределённым по закону Гаусса, т.е. с интенсивностью $q\exp(-r^2/R^2)$. Граница полупространства свободна от нормальных и касательных нагрузок. Массовые силы отсутствуют.

2. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ

Введём цилиндрическую систему координат Orz , где радиальная ось r лежит на поверхности тела, вертикальная ось z перпендикулярна к ней и направлена вглубь полупространства, а начало координат (точка O) совпадает с геометрическим центром источника тепла, начинающего действовать в момент времени $t = 0$. Полная мощность нагрева составляет величину $Q = \pi R^2 q$. Теплофизические и упругие характеристики материала считаем не зависящими от температуры.

Краевая задача для нестационарного температурного поля $T(r,z,t)$ в нагреваемом полупространстве с граничным условием второго рода, запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \quad (r \geq 0,\ z \geq 0,\ t > 0) \quad , \quad -k\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} = q\exp(-r^2/R^2)H(t)$$

$$T(r, z, 0) = T(\infty, z, t) = T(r, \infty, t) = T_{,r}(0, z, t) = 0. \qquad (1)$$

Для удобства введём безразмерные переменные:

$$x = \frac{z}{R} \ , \ \rho = \frac{r}{R} \ , \ \tau = \frac{4at}{R^2} \ , \ \theta(\rho, x, \tau) = \frac{2k}{\sqrt{\pi}qR}T(r, z, t).$$

Здесь R – радиус сосредоточенности падающего теплового потока.

Точное аналитическое решение поставленной двумерной параболической задачи математической физики, полученное в работе [1] при помощи интегральных преобразований Ханкеля и Фурье, имеет вид:

$$\theta(\rho, x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty J_0(2\lambda\rho)\exp(-\lambda^2)\left[e^{-2\lambda x}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}} - \lambda\sqrt{\tau}\right) - e^{2\lambda x}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}} + \lambda\sqrt{\tau}\right)\right]d\lambda. \qquad (2)$$

В общем случае этот несобственный интеграл не выражается через элементарные и специальные функции и его необходимо рассчитывать численно.

В явном виде удается определить температурное поле лишь при следующих условиях:

1. В начале координат $\theta(0, 0, \tau) = 2\mathrm{arctg}(\sqrt{\tau})/\pi$ (График приведён на Рис.1).

2. На оси симметрии: $\theta(0, x, 1) = ½\exp(x^2)\mathrm{erfc}^2(x)$, $\theta(0, x, \infty) = \exp(x^2)\mathrm{erfc}(x)$ (Рис.2).

Кроме того, здесь справедливо общее соотношение:

$$\exp(-x^2)\theta(0, x, \tau) + \exp(-x^2/\tau)\theta(0, x/\sqrt{\tau}, 1/\tau) = \mathrm{erfc}(x)\mathrm{erfc}(x/\sqrt{\tau}).$$

3. На свободной поверхности: $\theta(\rho, 0, 1) = ½\exp(-\rho^2/2)[I_0(\rho^2/2) - L_0(\rho^2/2)]$,

$\theta(\rho, 0, \infty) = \exp(-\rho^2/2)I_0(\rho^2/2)$ (Графики приведёны на Рис.3).

Асимптотические разложения температуры (2) при малых и больших временах нагрева имеют вид:

$\theta(\rho, x, \tau << 1) \approx 2\sqrt{\tau}\exp(-\rho^2 - x^2/\tau)/\pi$, $\theta(\rho, x, \tau >> 1) \approx \theta(\rho, x, \infty) - 2\exp(-(\rho^2 + x^2)/\tau))/\pi/\sqrt{\tau}$.

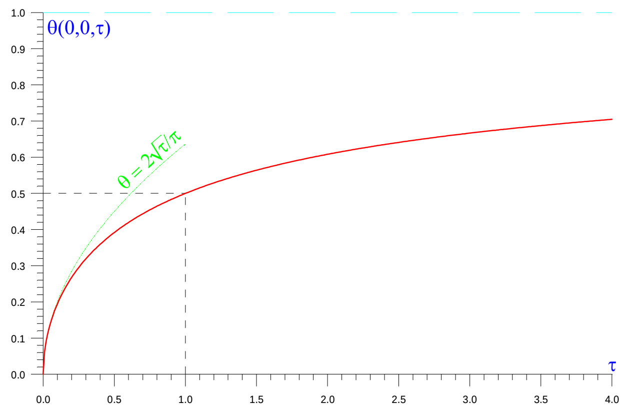


Рис.1 Температура в начале координат.

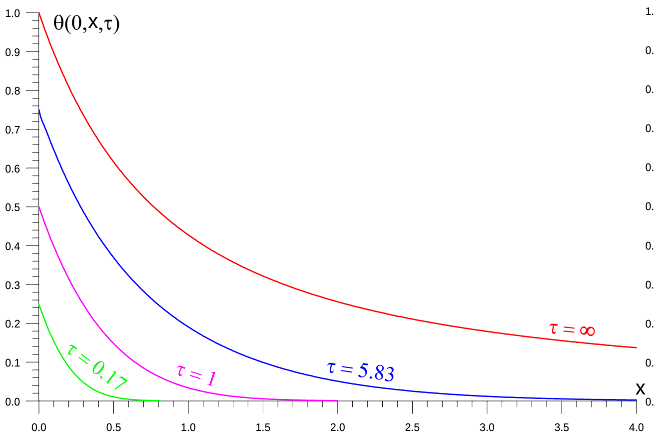


Рис.2 Температура на оси симметрии.

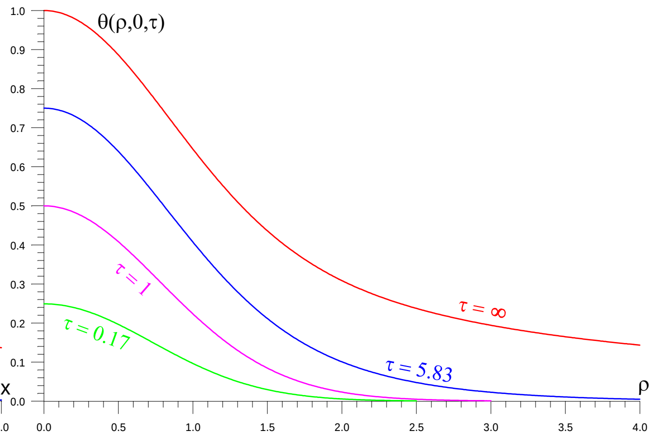


Рис.3 Температура на свободной поверхности

Видно, что в самом начале нагрева, т.е. без учёта бокового растекания тепла, радиальный профиль температуры фактически повторяет распределение интенсивности падающего теплового потока, при этом быстро затухая с глубиной, и в нагреваемом полупространстве реализуется квазиодномерное температурное поле. С другой стороны, отклонение величины $\theta(\rho,x,\tau>>1)$ от установившегося значения $\theta(\rho, x, \infty)$ описывается сферически-симметричным слагаемым, убывающим по мере удаления от начала координат и затухающим с течением времени.

Асимптотическое разложение найденных формул для $\theta(\rho, x, \tau)$ приводит к следующим результатам:

1. При $\tau \ll 1$ вблизи начала координат, изотермы почти параллельны свободной границе за исключением малого концевого участка. Остальная часть полупространства ещё не прогрета.

2. При $\tau = 1$ в окрестности центра изотермические поверхности имеют форму параболоидов и описываются уравнениями $x + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + 1/\sqrt{\pi})\rho^2 = x + 0.3626\rho^2 = \text{const} \ll 1$, тогда как на большом удалении они имеют форму эллипсоидов и описываются уравнениями $x^2 + \frac{1}{2}\rho^2 = \text{const} \gg 1$ (Рис.4).

3. При $\tau = \infty$ в окрестности центра изотермические поверхности имеют форму параболоидов и описываются уравнениями $x + \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\rho^2 = x + 0.443\rho^2 = \text{const} \ll 1$, тогда как на большом удалении они имеют сферическую форму $x^2 + \rho^2 = \text{const} \gg 1$ (см. Рис.5).

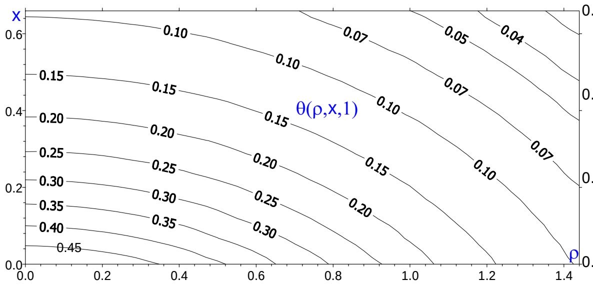


Рис.4 Температурное поле при $\tau = 1$.

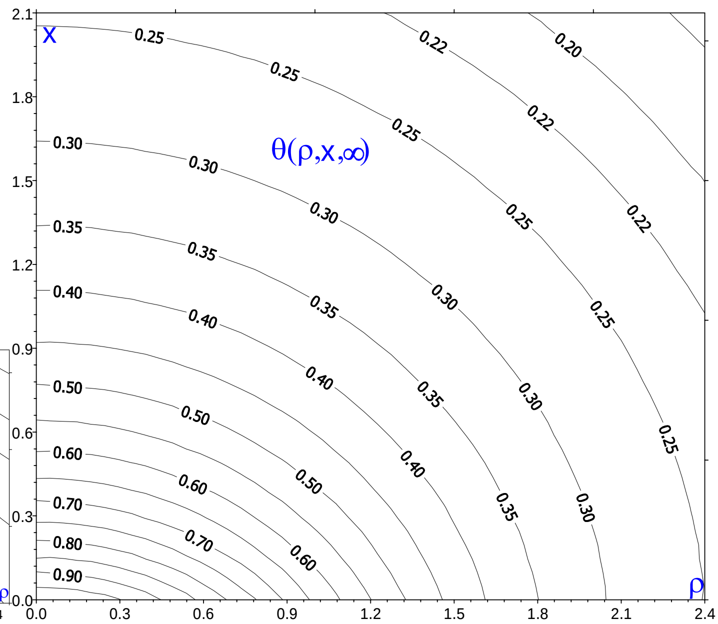


Рис.5 Установившееся температурное поле.

Таким образом, с течением времени происходит эволюция формы первоначально плоских и вытянутых в радиальном направлении изотерм путём их расширения вглубь полупространства. Аналогичная динамика формы изотерм при нагреве тела круговым источником тепла описана в [2].

Из условия ограниченности температуры (1) при $\rho = 0$ следует, что изотермы всегда будут подходить к оси симметрии под прямым углом. Это хорошо видно на Рис.4,5.

3. ТЕРМОУПРУГАЯ ЗАДАЧА

Перейдем к рассмотрению соответствующей квазистатической задачи о построении поля термических напряжений, общая постановка которой состоит из двух уравнений линейной термоупругости, соотношений Дюамеля-Неймана, условий совместности деформаций и уравнений равновесия. Сначала определим потенциал перемещений Гудьера Φ из равенства

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \theta.$$

Частное решение этого уравнения Пуассона находим в соответствии с известным алгоритмом [3]. Однако найденные компоненты, соответствующие потенциалу Φ не удовлетворяют заданным нулевым граничным условиям для нормального напряжения на свободной поверхности.

Следовательно, к полученным выражениям нужно добавить соответствующие компоненты бестемпературного поля напряжений, получаемого из решения системы однородных уравнений линейной теории упругости с помощью бигармонической функции Лява для полупространства. В результате находим точные формулы для всех безразмерных составляющих термоупругого поля σ_{ij} в интегральном виде. Они слишком громоздки для изложения в данной статье.

Размерные напряжения σ_{ij} определяются путем умножения соответствующих безразмерных величин p_{ij} на масштабный коэффициент $A = \sqrt{\pi}E\alpha qR/4k$.

Так как рассматриваемая задача является осесимметричной, то отличными от нуля будут четыре компоненты тензора σ_{ij} – радиальная $\sigma_{\rho\rho}$, сдвиговая $\sigma_{\rho x}$, окружная $\sigma_{\varphi\varphi}$, и осевая σ_{xx}.

Из уравнений равновесия следует, что при $\rho = 0$ будут выполняться соотношения $\sigma_{\rho\rho}(0,x,\tau) = \sigma_{\varphi\varphi}(0,x,\tau)$ и $\sigma_{\rho x}(0,x,\tau) = 0$. Кроме того, можно строго доказать, что для напряжений $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{xx} ось симметрии является линией экстремумов. Это следует из уравнений равновесия.

Что касается осевой и сдвиговой компонент, то обе они исчезают при $\tau \to \infty$, а их зависимость от коэффициента Пуассона в нестационарном режиме определяется масштабным множителем $1/(1 - \nu)$.

4. АНАЛИЗ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

4.1 Осевое напряжение

Величина p_{xx} может принимать как положительные так и отрицательные значения, обращаясь в нуль на свободной поверхности, и достигая максимальных растяжений на оси симметрии. Общая интегральная формула для $p_{xx}(\rho,x,\tau)$ позволяет найти простую асимптотику, справедливую при малых временах нагрева:

$$p_{xx}(\rho,x,+0) = \frac{\tau}{1-\nu}\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \xi^3 \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \xi x\right) J_0(\xi\rho)d\xi \qquad (3)$$

Соответствующее распределение изобар осевой компоненты приведено на Рис. 8.

Заметим, что функция $\sigma_{xx}(\rho, x, +0)$ является бигармонической, а выражение (3) упрощается на оси симметрии: $p_{xx}(0, x, +0) = 2\tau[2(1 + x^2)/\sqrt{\pi} - x(3 + 2x^2)\exp(x^2)\mathrm{erfc}(x)]/(1 - \nu)$.

Здесь имеет место только осевое растяжение, а его максимум достигается на глубине $x \approx 0.438$ и составляет величину $p_{xx} \approx 1.3425\tau/(1 - \nu)$. На приповерхностном участке напряжение линейно возрастает с глубиной по закону $p_{xx}(0, x << 1,+0) = 16\tau x/(1-\nu)/\sqrt{\pi}$, а на значительном удалении – убывает по закону $p_{xx}(0, x >> 1,+0) = 12\tau/[(1 - \nu)\sqrt{\pi}x^3]$ (см. Рис. 6).

С другой стороны, максимум осевого сжатия в начальный момент нагрева равен $p_{xx}(1.624,0.368,+0) = -0.156\tau/(1 - \nu)$, т.е. по абсолютной величине он в 8.62 раза меньше максимума растяжения.

Области растяжении и сжатия разделяются изобарой $p_{xx} = 0$, которая, отходя от свободной поверхности в точке с координатой $\rho = 1$, затем отклоняется от оси симметрии и стремится к асимптоте $x = \sqrt{3/2}\,\rho$, соответствующей нулевой изобаре точечного источника тепла [4,5].

Точка раздела областей сжатия и растяжения на свободной поверхности при $\tau = +0$ определяется из условия $\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$, которое сводится к уравнению $\int_0^\infty \xi^3 \exp(-\xi^2)J_0(2\xi\rho)d\xi = 0$, имеющему единственный корень $\rho_{0a} = 1$. Отметим, что на цилиндрической поверхности $\rho = 1$ возможно только осевое растяжение, которое достигает максимума $0.288\tau/(1 - \nu)$ на глубине $x = 1.024$ (см. Рис. 6).

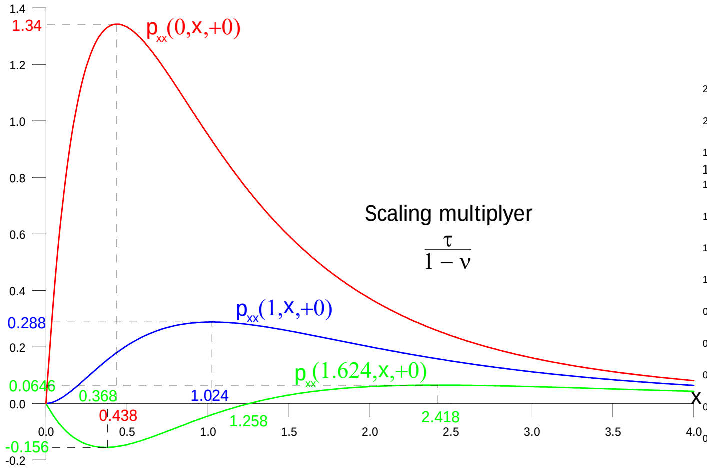


Рис.6 Распределение p_{xx} по глубине при $\tau = +0$

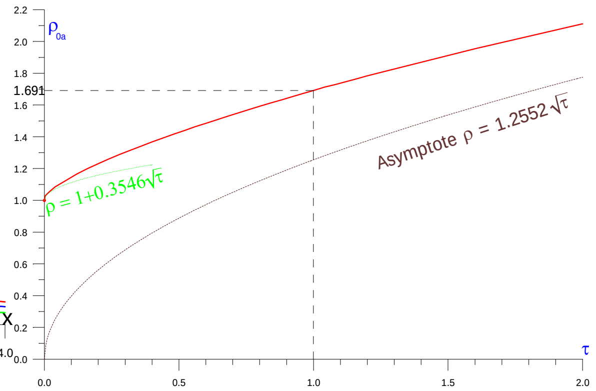


Рис.7 Координата изобары $p_{xx} = 0$ на поверхности

Что касается формы изобар p_{xx} , то в области положительных значений они представляют собой совокупность вложенных замкнутых поверхностей, напоминающих эллипсоиды, и окружающих точку максимального растяжения, лежащую на оси симметрии. В области сжатия изобары также похожи на эллипсоиды, окружающие точку максимального сжатия, но ось их симметрии наклонена под углом к свободной поверхности.

С течением времени, картина распределения изобар, представленная на Рис.8, не изменяясь качественно, перемещается вглубь нагреваемого полупространства. При этом граница области растяжения будет продвигаться от центра к периферии и радиус расширяющейся области

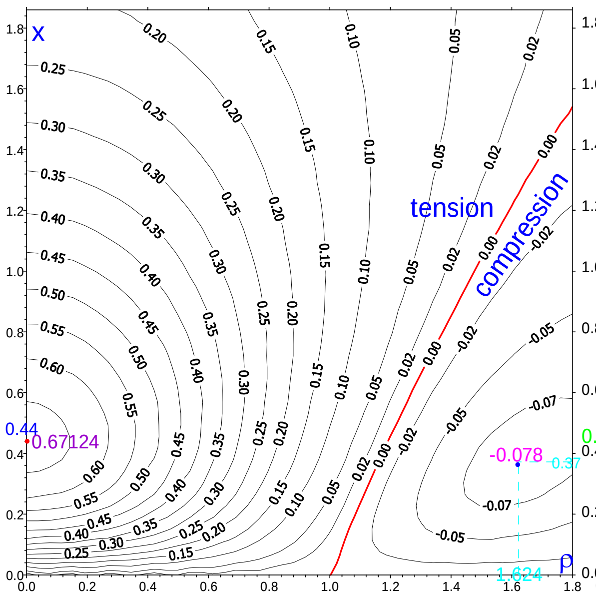


Рис.8. Поле осевого напряжения при $\tau = +0$

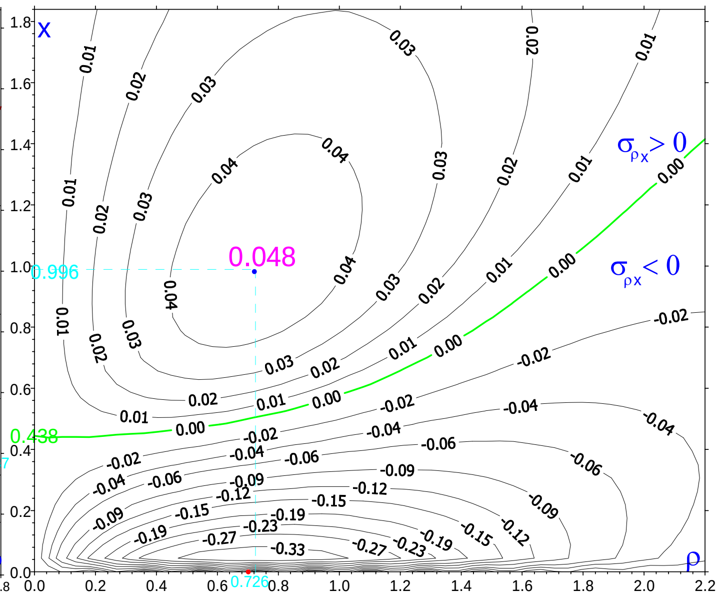


Рис.9. Поле напряжения сдвига при $\tau = +0$

положительных значений p_{xx} на свободной поверхности $\rho_{0a}(\tau)$ в каждый момент времени

определяется из условия $\frac{\partial^2 p_{xx}}{\partial x^2}|_{x=0} = 0$. Используя асимптотические разложения, находим при малых

временах нагрева приближённую зависимость $\rho_{0a}(\tau << 1) \approx 1 + \frac{1}{4}\pi\sqrt{e}[(\frac{1}{2}I_0(\frac{1}{2}) - I_1(\frac{1}{2})]\sqrt{\tau} \approx 1 + 0.3546\sqrt{\tau}$, тогда как при больших временах нагрева – $\rho_{0a}(\tau >> 1) \approx 1.2552\sqrt{\tau}$ (см. [4,5]).

График движения нулевой изобары приведён на Рис.7.

4.2 Напряжение сдвига

Величина $p_{\rho x}$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения и обращается в нуль на свободной поверхности и на оси симметрии .

Общая интегральная формула для $p_{\rho x}(\rho,x,\tau)$ позволяет найти асимптотическое выражение, справедливое при малых временах нагрева:

$$p_{\rho x}(\rho,x,+0) = \frac{\tau}{1-\nu}\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \xi^2 \exp(-\frac{\xi^2}{4} - \xi x)J_0(\xi\rho)(\xi x - 1)d\xi$$

Соответствующее распределение изобар приведено на Рис.9.

Максимальное положительное значение компоненты сдвига $p_{\rho x}(0.726, 0.996, +0) = 0.048\tau/(1 - \nu)$.

Изобара $p_{\rho x} = 0$ при $\tau << 1$ отходит по нормали от оси симметрии в точке $x = 0.438$ и затем, отклоняясь от свободной поверхности, стремится к асимптоте $x = \sqrt{2/3}\,\rho$, характерной для точечного источника тепла [4,5].

Заметим, что на поверхности нулевое граничное условие не выполняется, так как при разложении компоненты $p_{\rho x}(\rho,x,\tau)$ в ряд по времени при $\tau = +0$, мы пренебрегли членами порядка $\exp(-x^2/4\tau)$.

По мере нагрева, изобары на Рис.9, почти не изменяясь, перемещаются вглубь полупространства.

4.3 Радиальное напряжение

Компонента $\sigma_{\rho\rho}$ на свободной поверхности всегда отрицательна и ее распределение при малых τ (так же, как и распределение компоненты $\sigma_{\varphi\varphi}$) фактически повторяет радиальный профиль падающего теплового потока, т.е. имеет вид: $p_{\rho\rho}(\rho,0,\tau <<1) = p_{\varphi\varphi}(\rho,0,\tau<<1) \approx -4\sqrt{\tau}\exp(-\rho^2)/\pi/(1-\nu)$, что свидетельствует о квазиодномерном характере термоупругого поля в начале нагрева.

Дальнейшая эволюция величины $p_{\rho\rho}(\rho,0,\tau)$ с течением времени изображена на Рис. 10 и Рис.11.

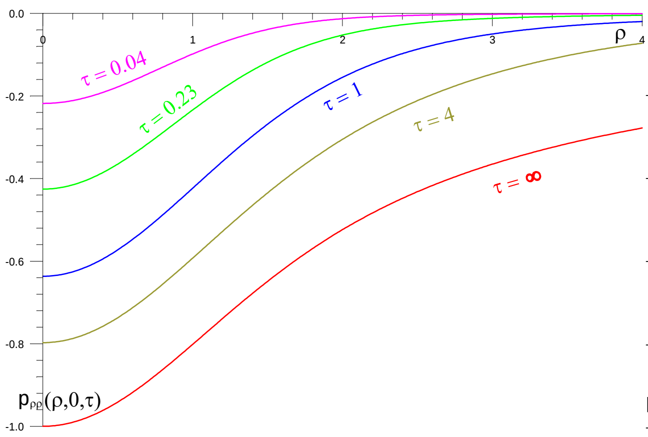


Рис.10. Радиальное напряжение на границе при $\nu = 0$.

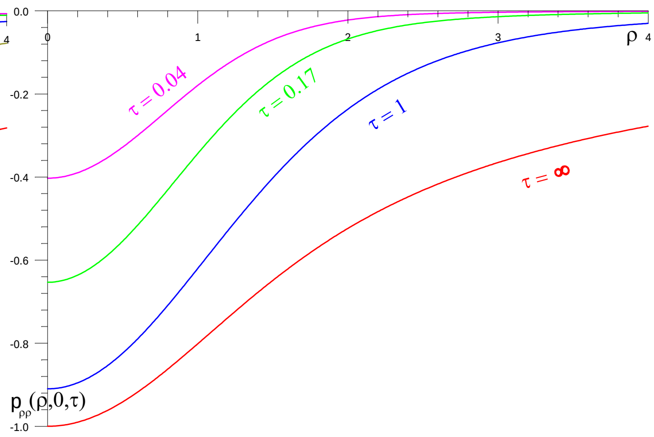


Рис.11. Радиальное напряжение на границе при $\nu = ½$

Обратим внимание на то, что стационарное термоупругое состояние устанавливается быстрее в материалах с большим значением коэффициента Пуассона.

В каждый момент времени наибольшее сжимающее напряжение (как радиальное, так и окружное) достигается в начале координат.

$$p_{\rho\rho}(0,0,\tau) = p_{\varphi\varphi}(0,0,\tau) = -\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1+\nu}{1-\nu}\sqrt{\tau}\left[1-\sqrt{\tau}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}(\sqrt{\tau})\right)\right]+\mathrm{arctg}(\sqrt{\tau})\right\} \qquad (4)$$

Заметим, что это равномерное двустороннее сжатие, монотонно возрастающее с течением времени тем быстрее, чем больше величина коэффициента Пуассона. При $\tau \to \infty$ $p_{\rho\rho}(0, 0, \infty) = p_{\varphi\varphi}(0, 0, \infty) = -1$. Соответствующий график приведён на Рис.12.

Для малых и больших τ формула (4) упрощается:

$$(1-\nu)p_{\rho\rho}(0,0,\tau << 1) = (1-\nu)p_{\varphi\varphi}(0,0,\tau << 1) \approx -\frac{4\sqrt{\tau}}{\pi} + (1+\nu)\tau - \frac{4}{3\pi}(1-2\nu)\tau^{3/2} + \frac{4}{15\pi}(1+4\nu)\tau^{5/2} + ;$$

$$p_{\rho\rho}(0,0,\tau >> 1) = p_{\varphi\varphi}(0,0,\tau >> 1) \approx -1 + \frac{4}{3\pi(1-\nu)\sqrt{\tau}}\left(1-2\nu-\frac{1-4\nu}{5\tau}+\ldots\right).$$

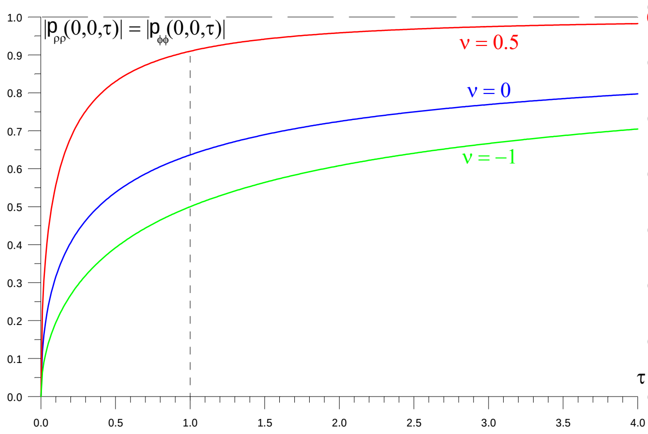


Рис.12. Радиальное и окружное напряжения в центре

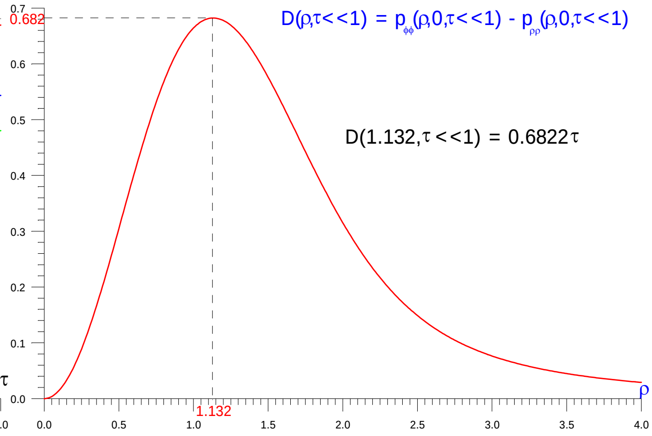


Рис.13. Разность окружной и радиальной компонент

4.4 Окружное напряжение

Компонента $\sigma_{\varphi\varphi}$ на свободной поверхности всегда отрицательна вблизи зоны максимального нагрева. Что же касается области $x = 0$, $\rho >> 1$, то здесь у материалов, с коэффициентом Пуассона $\nu <$ ½ возникает область азимутального растяжения, внутренняя граница которой начинается при $\tau = +0$ около центра и далее неограниченно расширяется в радиальном направлении с течением времени. При $\nu = ½$ на свободной поверхности возможно только азимутальное сжатие.

Заметим, что при любых τ разность окружного и радиального напряжений $D(\rho,\tau)$ на границе полупространства, изображённая на Рис 14, перестаёт зависеть от величины коэффициента Пуассона.

В частности, при малых значениях безразмерного времени справедливо равенство

$$D(\rho,\tau << 1) = p_{\varphi\varphi}(\rho,0,\tau << 1) - p_{\rho\rho}(\rho,0,\tau << 1) = 2\tau\exp(-\rho^2/2)[\rho^2 I_1(\rho^2/2) - (1+\rho^2)I_1(\rho^2/2)]$$

Соответствующий график приведён на Рис.13. Максимальное значение $D(1.132, \tau << 1) = 0.6822\tau$.

Обратим внимание на то, что по мере дальнейшего нагрева, разность обеих компонент $D(\rho,\tau)$ при $x = 0$ монотонно возрастает и при этом радиальная координата точки максимума непрерывно увеличивается. Эволюция величины $D(\rho,\tau)$ с течением времени представлена на Рис. 14.

Предельная форма $D(\rho,\infty)$ достигается в установившемся режиме нагрева (см. Рис. 14,15).

4.5 Стационарное термоупругое поле

Известно, что при $\tau \to \infty$ в полуограниченном теле, нагреваемом постоянным поверхностным тепловым потоком, затухающим при $\rho \to \infty$, реализуется плосконапряженное состояние, т.е. отличными от нуля являются лишь компоненты $p_{\rho\rho}$ и $p_{\varphi\varphi}$, причем обе они не зависят от коэффициента Пуассона и могут принимать только отрицательные значения.

Найденное в замкнутой форме стационарное термоупругое поле имеет вид:

$$p_{\rho\rho}(\rho,x,\infty) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}\rho}\int_0^\infty \exp(-\lambda^2 - 2\lambda x)J_1(2\lambda\rho)\frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$p_{\varphi\varphi}(\rho,x,\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp(-\lambda^2 - 2\lambda x)[\frac{1}{\lambda\rho}J_1(2\lambda\rho) - J_0(2\lambda\rho)]d\lambda$$

В общем случае эти интегралы не вычисляются, и обе компоненты тензора напряжений в явном виде можно определить лишь в двух случаях: 1) при $\rho = 0$, 2) при $x = 0$.

1) На оси симметрии имеет место равномерное двухосное сжатие, абсолютная величина которого, максимальная и равная единице в начале координат, монотонно убывает с глубиной пропорционально установившейся температуре и стремится к нулю при $x \to \infty$ (см. Рис.2).

$$p_{\rho\rho}(0, x, \infty) = p_{\varphi\varphi}(0, x, \infty) = -\exp(x^2)\mathrm{erfc}(x).$$

Отметим, что во всех точках полупространства вне оси симметрии справедливо неравенство:

$$|p_{\rho\rho}(\rho, x, \infty)| > |p_{\varphi\varphi}(\rho, x, \infty)|.$$

2) Термоупругое поле на свободной поверхности

$$p_{\rho\rho}(\rho,0,\infty) = -\exp(-\rho^2/2)[I_0(\rho^2/2) + I_1(\rho^2/2)] \quad , \quad p_{\varphi\varphi}(\rho,0,\infty) = -\exp(-\rho^2/2)[I_0(\rho^2/2) - I_1(\rho^2/2)].$$

Эти распределения обеих компонент имеют куполообразный вид. По мере удаления от центра к периферии, абсолютные величины как $p_{\rho\rho}$ так и $p_{\varphi\varphi}$ монотонно убывают, стремясь к нулю при $\rho \to \infty$ (Рис.15). Разность напряжений на свободной границе $D(\rho,\infty) = p_{\varphi\varphi}(\rho,0,\infty) - p_{\rho\rho}(\rho,0,\infty) = 2\exp(-\rho^2/2)I_1(\rho^2/2)$ достигает максимума 0.438 при $\rho = 1.758$.

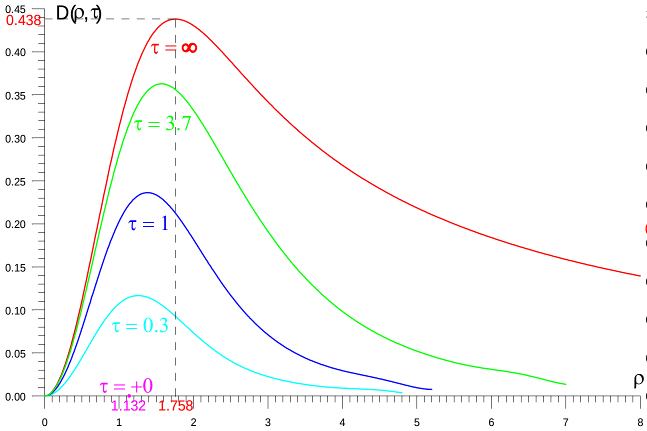


Рис. 14 Разность окружного и радиального напряжений

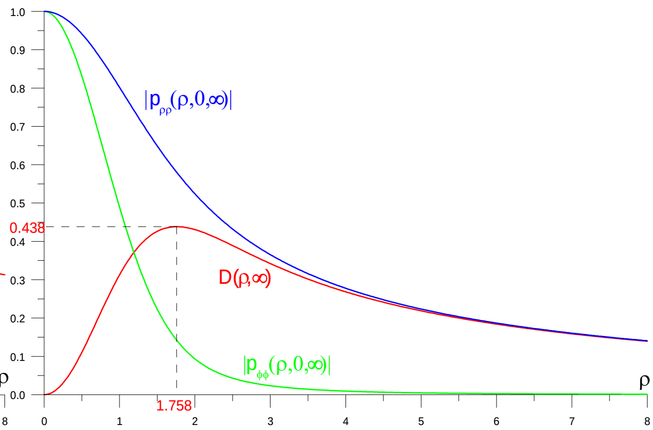


Рис. 15 Стационарные напряжения на поверхности

Вблизи начала координат и на значительном удалении от него справедливы асимптотики:

$$|p_{\rho\rho}(\rho << 1,0,\infty)| \approx 1 - \rho^2/4 \quad , \quad |p_{\rho\rho}(\rho >> 1,0,\infty)| \approx 2/\sqrt{\pi}\rho;$$

$$|p_{\varphi\varphi}(\rho << 1,0,\infty)| \approx 1 - 3\rho^2/4 \quad , \quad |p_{\varphi\varphi}(\rho >> 1,0,\infty)| \approx 1/\sqrt{\pi}\rho^3.$$

Таким образом в окрестности центра изобары обеих компонент имеют форму параболоидов:

$x + \sqrt{\pi}\rho^2/8 = x + 0.222\rho^2 = \text{const} << 1$ для $p_{\rho\rho}$ и $x + 3\sqrt{\pi}\rho^2/8 = x + 0.665\rho^2 = \text{const} << 1$ для $p_{\varphi\varphi}$.

Вдали от центра изобары радиальной компоненты также имеют параболическую форму

$$x + ½\rho^2 = \text{const} >> 1$$

Это хорошо видно на Рис.16.

Напряжение $|p_{\rho\rho}|$, принимая максимальные значения на границе полупространства, монотонно убывает с глубиной при всех $\rho = \text{const}$, тогда как окружная компонента ведет себя аналогично только при $0 < \rho \le 1.121$. Это пограничное значение ρ определяется из условия ортогональности изобары окружного напряжения к свободной поверхности в данной точке, которое имеет вид $\left.\frac{\partial p_{\phi\phi}}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ и сводится к неявному уравнению $\exp(\rho^2) = 1 + 2\rho^2$, имеющему единственный корень $\rho = 1.121$.

В области $\rho > 1.121$ наибольшая величина $|p_{\varphi\varphi}|$ достигается на некоторой линии максимумов, расположенной внутри полупространства (в диапазоне $|p_{\varphi\varphi}| \le 0.412$), причём осевая координата x любой её точки, имеющей радиальную координату ρ определяется из неявного уравнения $\frac{\partial p_{\phi\phi}}{\partial x} = 0$, решаемого численно. Начинаясь на свободной поверхности, эта линия по мере удаления от центра стремится к асимптоте $x = \sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}\,\rho = 0.786\rho$, характерной для точечного источника тепла [4,5].

Поле $|p_{\varphi\varphi}|$ на линии максимумов образует своеобразный «гребешок» (см.Рис. 17).

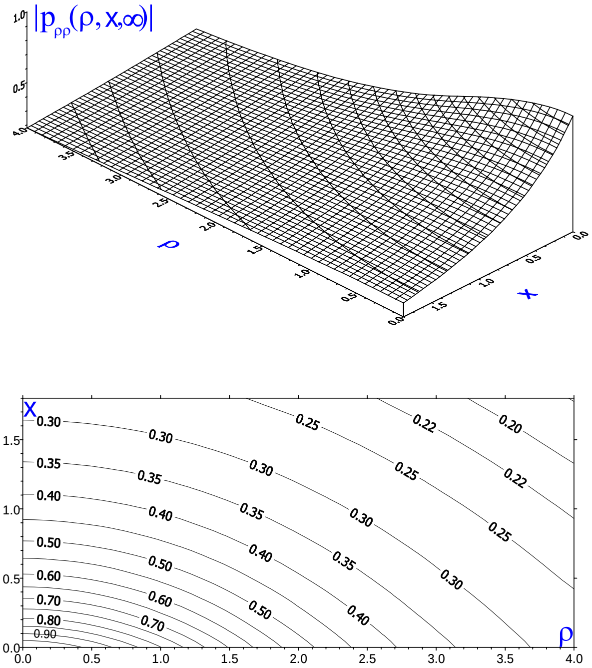


Рис.16. Стационарное поле радиального напряжения

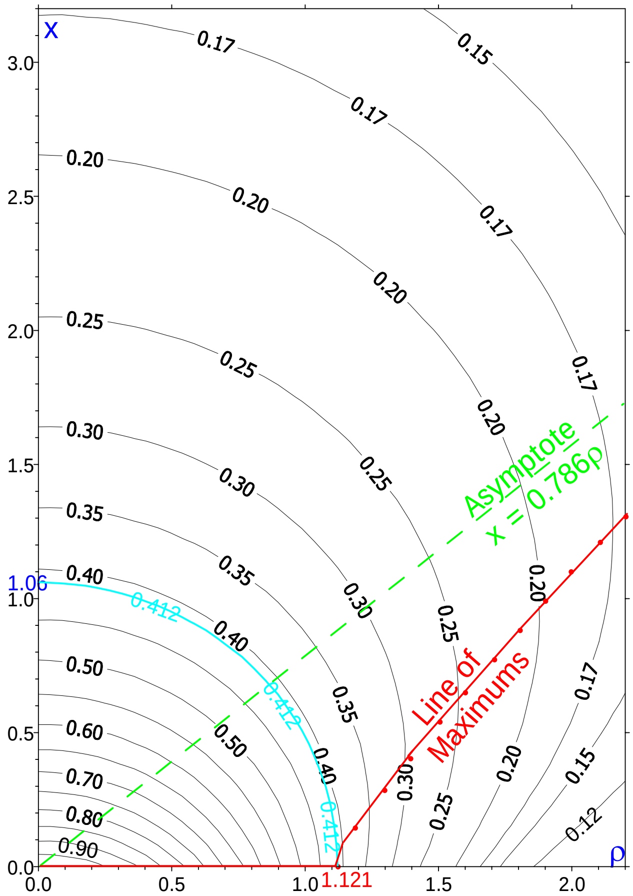


Рис.17. Стационарное поле окружного напряжения

5. РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИОННОГО КОНТУРА

Для определения нестационарного профиля свободной поверхности, возникающего вследствие термических деформаций нагреваемого тела, найдено в интегральном виде радиальное распределение осевой компоненты вектора упругих перемещений на границе полупространства $u_z(r,0,t)$.

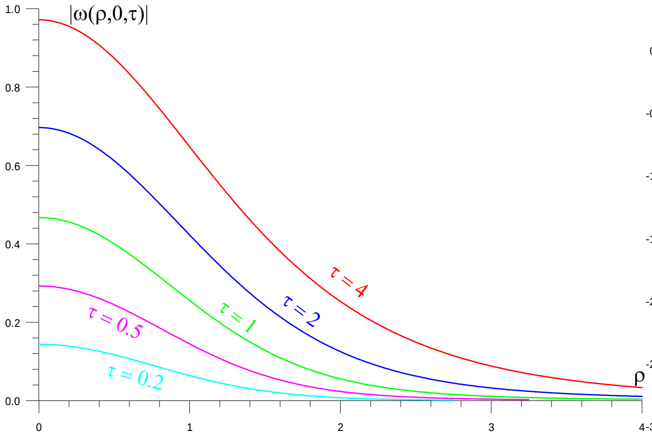
Введём для удобства безразмерную величину смещения $\omega(\rho,0,\tau) = ku_z(r,0,t)/(qR^2\alpha)$.

Высота искривленной поверхности в каждый момент времени максимальна в начале координат, монотонно убывает по мере удаления от центра к периферии и стремится к нулю при $\rho >> 1$.

В начале нагрева осевое смещение поверхности линейно возрастает с течением времени, а его радиальное распределение повторяет профиль падающего теплового потока:

$$\omega(\rho,0,\tau<<1) \approx -(1+\nu)\tau\exp(-\rho^2).$$

Эволюция контура свободной поверхности с течением времени представлена на Рис.18.



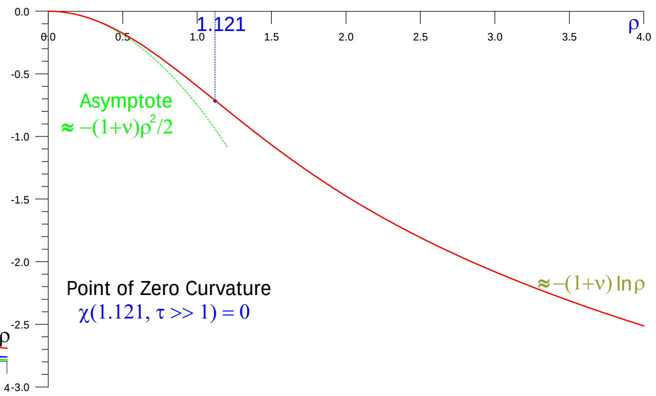


Рис.18 Профиль поверхности при различных τ

Рис.19. Предельная форма профиля поверхности ($\nu = ½$)

Стационарной формы контура не существует и при $\tau >> 1$ нормальное смещение каждой точки поверхности неограниченно возрастает по логарифмическому закону. Можно, однако, аналитически определить предельную форму нестационарного профиля свободной поверхности при $\tau \to \infty$.

$$\lim_{\tau\to\infty}[\omega(\rho,0,\tau) - \omega(0,0,\tau)] = \omega(\rho,0,\infty) - \omega(0,0,\infty) = -(1+\nu)\int_0^\infty \exp(-\frac{\lambda^2}{4})[1 - J_0(\lambda\rho)]\frac{d\lambda}{\lambda} =$$

$$= ½(1+\nu)[\mathrm{Ei}(-\rho^2) - 2\ln\rho - C].$$

Вблизи центра (при $\rho << 1$) предельный контур имеет параболическую асимптотику

$\omega \approx -½(1+\nu)\rho^2$, а при $\rho = 1.121$ кривизна профиля деформированной поверхности меняет знак. Соответствующий график изображён на Рис. 19.

Приведем найденное в явном виде и показанное на Рис. 20 осевое смещение центральной точки:

$$\omega(0,0,\tau) = -(1+\nu)[\tau - \sqrt{\tau(\tau+1)} + \ln(\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau+1})] \quad (5)$$

Для малых и больших значений τ имеют место асимптотические представления формулы (5):

$$\omega(0,0,\tau << 1) \approx -(1+\nu)\tau(1-2\sqrt{\tau}/3+\ldots) \quad , \quad \omega(0,0,\tau >> 1) \approx -(1+\nu)[\ln(4\tau)-1+\ldots]/2.$$

Кроме того, с помощью найденного осевого смещения при $x = 0$, можно определить

безразмерную кривизну изогнутой поверхности $\chi(\rho,\tau) = \dfrac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2}}{[1+(\dfrac{\partial\omega}{\partial\rho})^2]^{3/2}}$.

Так как вследствие осевой симметрии задачи, в начале координат $\dfrac{\partial\omega}{\partial\rho}|_{\rho=0} = 0$ при любом τ ,

кривизна деформированной границы в центральной точке определяется по формуле

$$\chi(0,\tau) = \frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2}|_{\rho=0} = 2(1+\nu)\tau(1-\sqrt{\frac{\tau}{\tau+1}}).$$

С течением времени кривизна увеличивается от нуля при $\tau = 0$ до $\chi = 1+\nu$ при $\tau = \infty$ сначала по закону $\chi(0,\tau << 1) \approx 2(1+\nu)\tau(1-\sqrt{\tau})$, а при больших временах – по закону $\chi(0,\tau >> 1) \approx (1+\nu)(1-0.75/\tau+\ldots)$. Соответствующий график приведён на Рис 21.

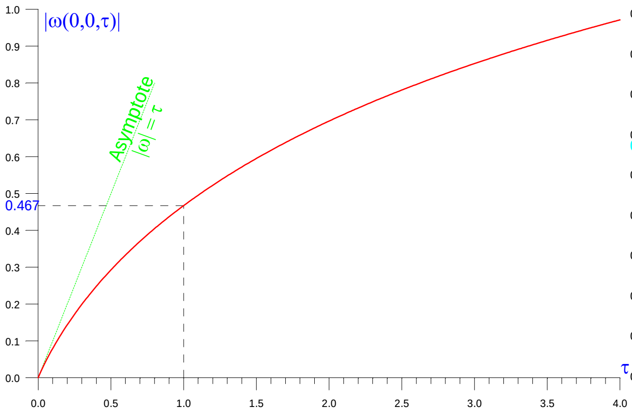


Рис.20 Осевое перемещение в начале координат

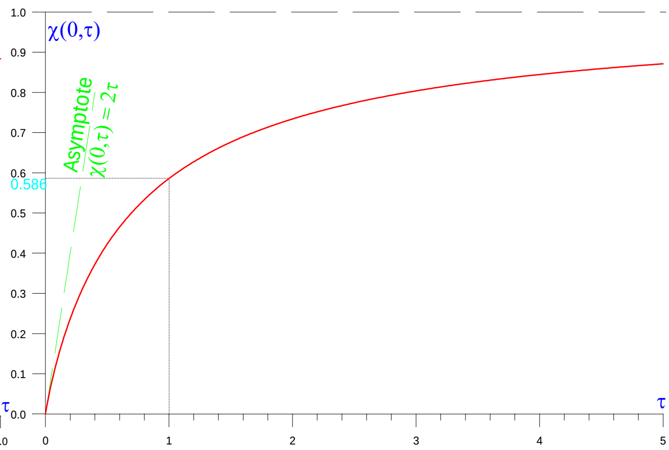


Рис.21. Кривизна поверхности в начале координат ($\nu = 0$)

Отметим, что с помощью найденного точного выражения для профиля свободной поверхности можно легко определить фокальное расстояние образовавшегося выпуклого «термического зеркала», которое в случае частичного отражения падающего излучения приводит к расфокусировке отражённого луча.

6. ВЫВОДЫ

В работе теоретически рассмотрена одна из важных задач несвязанной квазистатической линейной термоупругости. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании разрушения и трещинообразования в хрупких материалах под действием термических напряжений, вызванных поверхностным нагревом а также при изучении тепловых деформаций элементов лазерной оптики.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

T – температура, ^{0}K; θ – безразмерная температура; R – коэффициент сосредоточенности, м;
r – радиальная координата, м; ρ – безразмерная радиальная координата;
z – осевая координата, м; x – безразмерная осевая координата;
t – время, с; τ – безразмерное время;
E – модуль Юнга, Н/м^2; ν – коэффициент Пуассона, $-1 \le \nu \le ½$;
a – коэффициент температуропроводности, м^2/с; k – коэффициент теплопроводности, Вт/м/^{0}K;
Q – полная тепловая мощность, Вт; q – поверхностная плотность мощности, Вт/м^2;
H– единичная функция Хевисайда;
I_0, I_1 – функции Бесселя от мнимого аргумента нулевого и первого порядка;
J_0 – функция Бесселя от действительного аргумента нулевого порядка;
L_0 – модифицированная функция Струве нулевого порядка
p_{ij} – безразмерные компоненты тензора напряжений; σ_{ij} – размерные компоненты тензора напряжений, Н/м^2;
A – масштабный коэффициент напряжений, Н/м^2;
Φ – термоупругий потенциал перемещений;
Δ – лапласиан; в цилиндрических координатах $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)(\partial/\partial r) + \partial^2/\partial z^2$;
α – коэффициент линейного температурного расширения, $^0K^{-1}$;
$u_z(r,0,t)$ – осевое перемещение поверхности, м; ω(ρ,0,τ) – безразмерная осевое перемещение;
C = 0.5772 – постоянная Эйлера;
χ – безразмерная кривизна деформированной поверхности;

Список литературы

1 **Пинскер В.А**. Квазистатические термоупругие поля в полуограниченном теле, нагреваемом гауссовым поверхностным источником тепла. // Тепловые Процессы в Технике. 2011. Т.3, № 8. С. 365–370.

2 **Пинскер В.А.** Нестационарное температурное поле в полуограниченном теле, нагреваемом круговым поверхностным источником тепла // ТВТ. 2006. Т.44. № 1. С. 127–135.

3 **Новацкий В.** Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364с.

4 **Пинскер В.А**. Квазистатические термоупругие напряжения в полупространстве, нагреваемом точечным поверхностным источником тепла постоянной мощности. Труды VI

Минского международного форума по тепло-и массообмену 2008 г. Минск. Секция 3, Доклад 3-17.

5 **Goldstein R.V., Pinsker V.A.** Uncoupled Quasi-Steady Thermoelastic Stresses in Semispace Heated by Surface Point-Like Heat Source. Proceedings of the 8th International Congress on Thermal Stresses TS2009, June 1-4, 2009 University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, USA, vol. 1, ed by M. Ostoja-Starzewsky, P. Marzocca.