УДК 624.126.04.054

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РЕКРИСТАЛЛИЗАЦИИ НА ОСНОВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДВУХМЕРНОМ СЛУЧАЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ С НЕОДНОРОДНЫМИ (НЕПРЕРЫВНЫМИ И РАЗРЫВНЫМИ НА ОДНОЙ ИЗ СТОРОН) ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И НЕОДНОРОДНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Т. М. Погорелый, В. Г. Мирончук

Национальный университет пищевых технологий, г. Киев, Украина

При прохождении процесса массовой кристаллизации сахарозы наблюдается процесс рекристаллизации по асимметрическому механизму. Моделирование процесса рекристаллизации рассмотрен с точки зрения ячеистой модели коллективного роста и растворения частиц дисперсной фазы сахарозы (рис. 1). С целью определения веса влияния процесса рекристаллизации непосредственно на процесс прохождения кристаллизации сахарозы возникла необходимость нахождения аналитических решений следующих двух нестационарных задач теплопроводности в двумерном случае для прямоугольных областей с неоднородными граничными условиями и неоднородными начальными условиями: первая задача теплопроводности рассмотрена для случая с непрерывными на каждой из сторон неоднородными граничными условиями (рис. 2); вторая задача теплопроводности — для случая с разрывными на одной из сторон и непрерывными на всех остальных сторонах неоднородными граничными условиями (рис. 3).

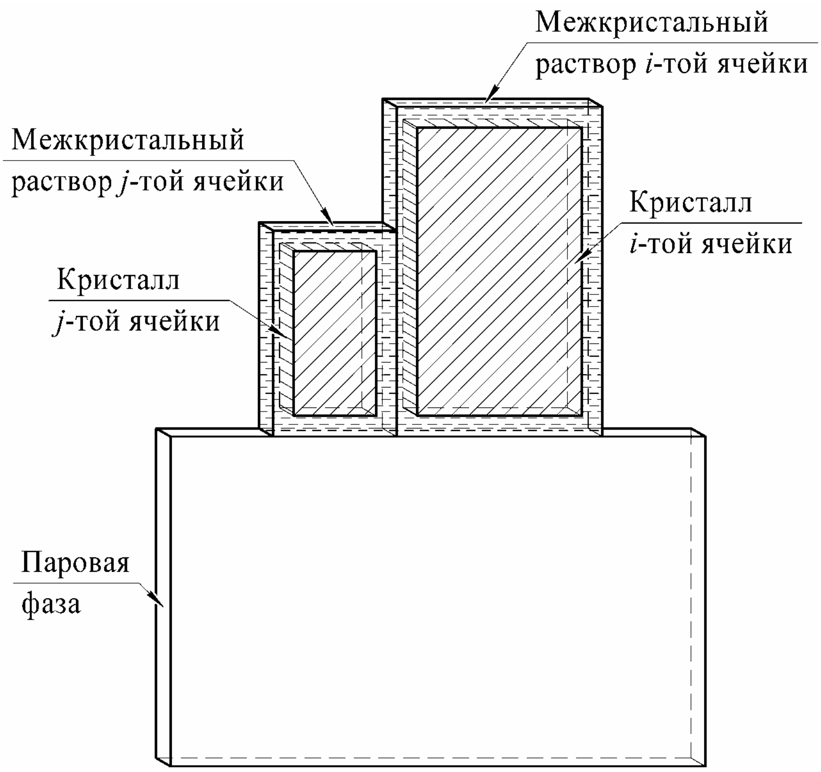

Рис. 1. Ячеистая модель кристалл *j*–той (меньшей) ячейки–межкристальный раствор *j*–той ячейки–паровая фаза– межкристальный раствор *i*–той (большей) ячейки– кристалл *i* –той ячейки

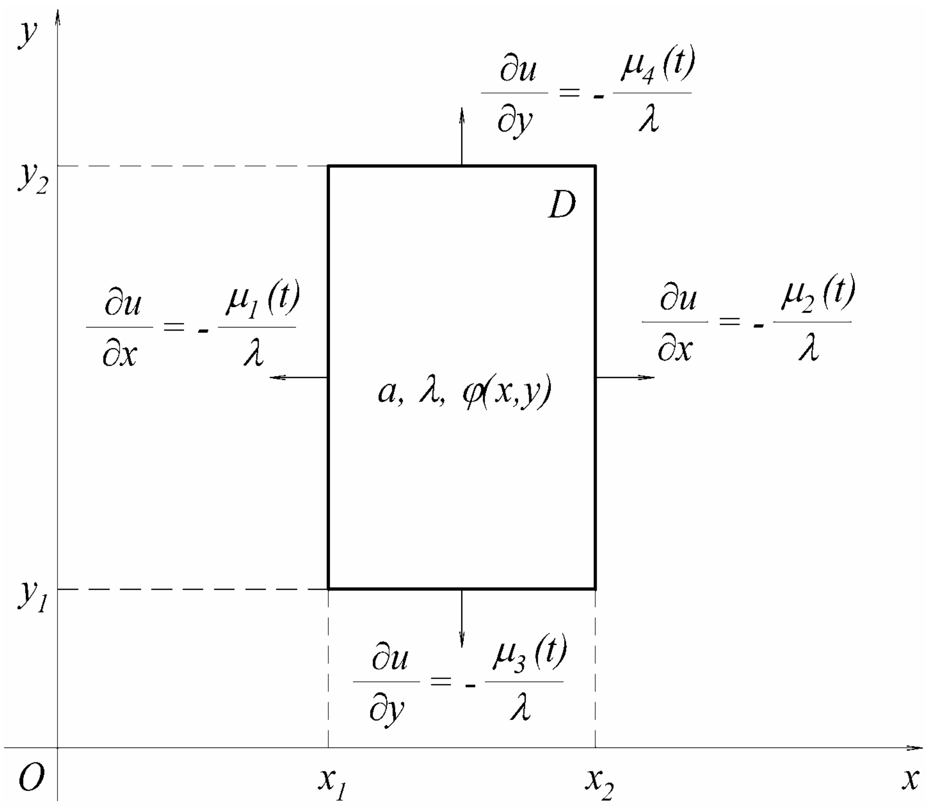

Рис. 2. Нестационарная задача теплопроводности для двумерной прямоугольной области *D* с непрерывными на каждой из сторон неоднородными граничными условиями и неоднородными начальными условиями

Первая задача теплопроводности в двумерном случае решалась на основании нахождения аналитического решения нестационарного уравнения теплопроводности [1, 2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

с неоднородными граничными условиями второго рода (рис. 2):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1 \\ y_1 \le y \le y_2}} = -\frac{\mu_1(t)}{\lambda}, \quad (t \ge 0), \tag{2, а}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2 \\ y_1 \le y \le y_2}} = -\frac{\mu_2(t)}{\lambda}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1 \\ x_1 \le x \le x_2}} = -\frac{\mu_3(t)}{\lambda}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2 \\ x_1 \le x \le x_2}} = -\frac{\mu_4(t)}{\lambda}, \quad (t \ge 0), \tag{2, б}$$

и следующим неоднородном начальном условии:

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad (x_1 \le x \le x_2,\ y_1 \le y \le y_2). \tag{3}$$

Нахождение решения данной задачи базировалось на использовании метода разделения переменных Фурье. Заметим, что непосредственное применение метода Фурье для сформулированной задачи (1)–(3) не представляется возможным в силу неоднородных (тождественно не равных нулю) граничных условий (2, а)–(2, б). Исходя из этого, привели задачу (1)–(3) к такому виду, при котором непосредственное применение метода Фурье становится возможным[3]. Решение задачи (1)–(3) искали в виде суммы двух функций:

$$u(x,y,t) = v(x,y,t) + U(x,y,t)\,, \tag{4}$$

где функция $U(x,y,t)$ выбрана так, чтобы удовлетворять неоднородные граничные условия (2, а)–(2, б), т. е.:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}} = -\frac{\mu_1(t)}{\lambda}, \quad (t\ge 0)\,. \tag{2*, а}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}} = -\frac{\mu_2(t)}{\lambda}, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}} = -\frac{\mu_3(t)}{\lambda}, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}} = -\frac{\mu_4(t)}{\lambda}, \quad (t\ge 0)\,. \tag{2*, б}$$

Легко видеть, что искомая функция $U(x,y,t)$ будет равна:

$$\begin{aligned} U(x,y,t) = &-\frac{1}{\lambda\cdot(x_2-x_1)}\left[x\cdot\left(x_2\cdot\mu_1(t) - x_1\cdot\mu_2(t)\right) + \frac{x^2}{2}\cdot\left(\mu_2(t)-\mu_1(t)\right)\right] - \\ &-\frac{1}{\lambda\cdot(y_2-y_1)}\left[y\cdot\left(y_2\cdot\mu_3(t) - y_1\cdot\mu_4(t)\right) + \frac{y^2}{2}\cdot\left(\mu_4(t)-\mu_3(t)\right)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, в силу граничных условий (2, а)–(2, б) и начального условия (3), а также выбора функции $U(x,y,t)$, которая удовлетворяет граничным условиям (2*, а)–(2*, б), искомая функция $v(x,y,t)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}} - \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}} = 0\,, \tag{6}$$

а также следующему начальному условию:

$$\left.v(x,y,t)\right|_{t=0} = \left.u(x,y,t)\right|_{t=0} - \left.U(x,y,t)\right|_{t=0} = \psi(x,y)\,. \tag{7}$$

Следовательно, функция $\psi(x,y)$, исходя из условия (7), будет равна:

$$\begin{aligned} \psi(x,y) = \varphi(x,y) &+ \frac{1}{\lambda\cdot(x_2-x_1)}\left[x\cdot\left(x_2\cdot\mu_1(0) - x_1\cdot\mu_2(0)\right) + \frac{x^2}{2}\cdot\left(\mu_2(0)-\mu_1(0)\right)\right] + \\ &+\frac{1}{\lambda\cdot(y_2-y_1)}\left[y\cdot\left(y_2\cdot\mu_3(0) - y_1\cdot\mu_4(0)\right) + \frac{y^2}{2}\cdot\left(\mu_4(0)-\mu_3(0)\right)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности для функции $v(x,y,t)$ на основании (4) запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+a\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial U}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t)\,, \tag{9}$$

где функция $f(x,y,t)$ будет находиться из следующего выражения:

$$\begin{aligned} f(x,y,t)&=a\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial U}{\partial t}= \\ &=-\frac{1}{\lambda\cdot(x_2-x_1)}\left[a\big(\mu_2(t)-\mu_1(t)\big)-x\cdot\big(x_2\cdot\mu_1'(t)-x_1\cdot\mu_2'(t)\big)-\frac{x^2}{2}\cdot\big(\mu_2'(t)-\mu_1'(t)\big)\right]- \\ &\quad-\frac{1}{\lambda\cdot(y_2-y_1)}\left[a\big(\mu_4(t)-\mu_3(t)\big)-y\cdot\big(y_2\cdot\mu_3'(t)-y_1\cdot\mu_4'(t)\big)-\frac{y^2}{2}\cdot\big(\mu_4'(t)-\mu_3'(t)\big)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

В силу неоднородности дифференциального уравнения (9) и неоднородного начального условия (7), применить метод разделения Фурье для нахождения искомой функции $v(x,y,t)$ все еще не представляется возможным. В силу этого, представим функцию $v(x,y,t)$ в виде суммы двух функций $v_1(x,y,t)$ и $v_2(x,y,t)$:

$$v(x,y,t)=v_1(x,y,t)+v_2(x,y,t)\,. \tag{11}$$

Функция $v_1(x,y,t)$ при этом выберем так, чтобы удовлетворялось следующее нестационарное однородное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right), \tag{12}$$

со следующими однородными на основании (6) граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}}=0,\quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}}=0,\quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}}=0,\quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}}=0\,, \tag{13}$$

и следующим неоднородным начальным условием:

$$\left.v_1(x,y,t)\right|_{t=0}=\psi(x,y)\,, \tag{14}$$

учитывая, что функция $\psi(x,y)$ находится из выражения (8).

Тогда функция $v_2(x,y,t)$ будет удовлетворять следующее нестационарное неоднородное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t)\,, \tag{15}$$

со следующими однородными граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}}=0,\quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}}=0,\quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}}=0,\quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}}=0, \tag{16}$$

и следующему однородному начальному условию:

$$v_2(x,y,t)\big|_{t=0}=0. \tag{17}$$

Получив возможность непосредственно применить к задаче теплопроводности (12)–(14) метод разделения переменных Фурье, решение для функции $v_1(x,y,t)$ запишется в следующем виде [3]:

$$v_1(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{m,n}\cdot e^{-a\cdot\left(\left(\frac{m\pi}{x_2-x_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{y_2-y_1}\right)^2\right)\cdot t}\cdot\cos\frac{m\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{y_2-y_1}, \tag{18}$$

где коэффициенты $A_{m,n},(m\ge 0,n\ge 0)$, находятся из следующих выражений:

$$A_{0,0}=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{19}$$

$$A_{m,0}=\frac{2}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)\cdot\cos\frac{m\pi(\xi-x_1)}{x_2-x_1}d\xi d\eta,\quad (m\ge 1), \tag{20}$$

$$A_{0,n}=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{2}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)\cdot\cos\frac{n\pi(\eta-y_1)}{y_2-y_1}d\xi d\eta,\quad (n\ge 1), \tag{21}$$

$$A_{m,n}=\frac{2}{x_2-x_1}\cdot\frac{2}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)\cdot\cos\frac{m\pi(\xi-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(\eta-y_1)}{y_2-y_1}d\xi d\eta,\quad (m,n\ge 1). \tag{22}$$

Для функции $v_2(x,y,t)$ решение запишется в следующем виде [4]:

$$v_2(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}T_{2_{m,n}}(t)\cdot\cos\frac{m\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{y_2-y_1}, \tag{23}$$

где коэффициенты $T_{2_{m,n}}(t),(m\ge 0,n\ge 0)$, находятся из следующих выражений:

$$T_{2_{m,n}}(t)=\int_0^t e^{-a\cdot\left(\left(\frac{m\pi}{x_2-x_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{y_2-y_1}\right)^2\right)\cdot(t-\tau)}\cdot f_{m,n}(\tau)d\tau,\quad (m,n\ge 0). \tag{24}$$

Коэффициенты же $f_{m,n}(t),(m\ge 0,n\ge 0)$, в свою очередь, находятся из следующих выражений:

$$f_{0,0}(t)=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(\xi,\eta,t)d\xi d\eta\,, \tag{25}$$

$$f_{m,0}(t)=\frac{2}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(\xi,\eta,t)\cdot\cos\frac{m\pi(\xi-x_1)}{x_2-x_1}d\xi d\eta, \quad (m\ge 1)\,, \tag{26}$$

$$f_{0,n}(t)=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{2}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(\xi,\eta,t)\cdot\cos\frac{n\pi(\eta-y_1)}{y_2-y_1}d\xi d\eta, \quad (n\ge 1)\,, \tag{27}$$

$$f_{m,n}(t)=\frac{2}{x_2-x_1}\cdot\frac{2}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(\xi,\eta,t)\cdot\cos\frac{m\pi(\xi-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(\eta-y_1)}{y_2-y_1}d\xi d\eta, \quad (m,n\ge 1)\,, \tag{28}$$

где функция $f(x,y,t)$ записывается на основании выражения (10).

Окончательно, решение исходной задачи теплопроводности (1)–(3) на основании (4) и (11) будет записано через сумму функций:

$$u(x,y,t)=U(x,y,t)+v_1(x,y,t)+v_2(x,y,t)\,, \tag{29}$$

$U(x,y,t)$, представленной выражением (5); $v_1(x,y,t)$, представленной выражением (18), где коэффициенты $A_{m,n}, (m\ge 0, n\ge 0)$, в свою очередь, находятся из выражений (19)–(22); и функции $v_2(x,y,t)$, представленной выражением (23), где искомые коэффициенты $T_{2_{m,n}}(t), (m\ge 0, n\ge 0)$ и $f_{m,n}(t), (m\ge 0, n\ge 0)$ — находятся соответственно из выражений (24) и (25)–(28).

Вторая задача теплопроводности решалась на основании нахождения аналитического решения нестационарного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2}\right), \tag{30}$$

с неоднородными граничными условиями второго рода, разрывными на левой стороне и непрерывными на всех остальных сторонах границы области $\hat{D}$ (рис. 3):

$$\left.\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_{1_1}}}=-\frac{\hat{\mu}_{1_1}(t)}{\lambda}, \quad \left.\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_{1_1}\le y\le y_2}}=-\frac{\hat{\mu}_{1_2}(t)}{\lambda}, \quad \left.\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}}=-\frac{\hat{\mu}_2(t)}{\lambda}, \quad (t\ge 0), \tag{31, а}$$

$$\left.\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}}=-\frac{\hat{\mu}_3(t)}{\lambda}, \quad \left.\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}}=-\frac{\hat{\mu}_4(t)}{\lambda}, \quad (t\ge 0), \tag{31, б}$$

и следующим неоднородным начальным условием:

$$\left.\hat{u}(x,y,t)\right|_{t=0}=\hat{\varphi}(x,y), \quad (x_1\le x\le x_2,\, y_1\le y\le y_2)\,. \tag{32}$$

Как и в случае с поиском решения первой рассмотренной выше нами задачи теплопроводности, нахождение решения в данном случае базировалось на использовании метода разделения переменных Фурье. Следует отметить, что для нахождения

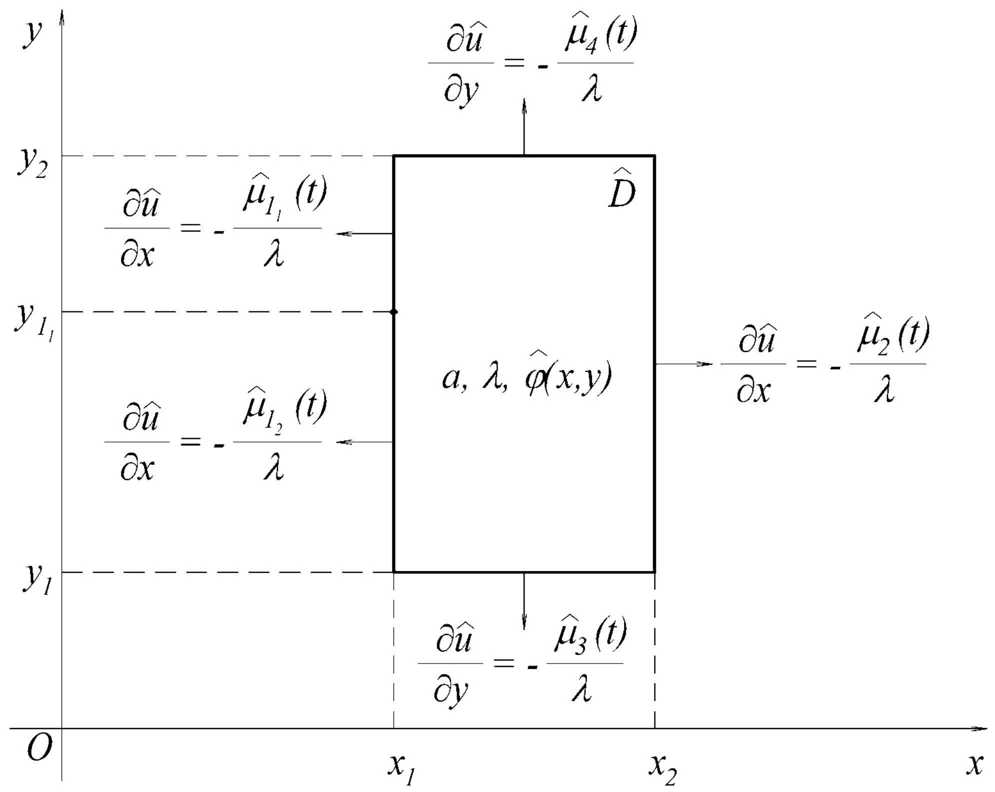

Рис. 3. Нестационарная задача теплопроводности для двумерной прямоугольной области $\hat{D}$ с разрывными на левой границе и непрерывными на всех остальных гранях неоднородными граничными условиями и неоднородными начальными условиями

аналитического решения разрывные граничные условия на левой границе (рис. 3) представили через известную симметрическую единичную функцию Хевисайда [5]:

$$\left.\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}} = -\frac{\hat{\mu}_{1_1}(t)}{\lambda}\cdot\left[H(y-y_1)-H(y-y_{1_1})\right]-\frac{\hat{\mu}_{1_2}(t)}{\lambda}\cdot\left[H(y-y_{1_1})-H(y-y_2)\right],\quad (t\ge 0), \tag{33, а}$$

$$\left.\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}} = -\frac{\hat{\mu}_2(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}} = -\frac{\hat{\mu}_3(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}} = -\frac{\hat{\mu}_4(t)}{\lambda},\quad (t\ge 0), \tag{33, б}$$

Таким образом, для нахождения решения $\hat{u}(x,y,t)$ данной задачи теплопроводности (30)–(32), которое записывается на основании найденного нами решения (29) для функции $u(x,y,t)$, необходимо для функции $\hat{U}(x,y,t)$ и соответствующих коэффициентов из выражений (19)–(22), (24)–(28) граничные условия (2*, а)–(2*, б) заменить на соответствующие им граничные условия (33, а)–(33, б).

Не уменьшая общности, следует заметить, что данные аналитические решения применимы не только для области уваривания сахарозы, но также и в теории термоупругости [6].

Обозначения:

$u(x,y,t)$, °С — функция распределения температуры в прямоугольной области $D=\{(x,y)|x_1\le x\le x_2,\ y_1\le y\le y_2\}$, в зависимости от координат x, y, м и времени t, с; $a=\dfrac{\lambda}{c\cdot\rho}$, м/с^2 — коэффициент температуропроводности; λ, Вт/(м·К) — коэффициент теплопроводности; c, кДж/(кг·К) — теплоемкость; ρ, кг/м^3 — плотность вещества; $\mu_i(t),\ i=\overline{1,4}$ — заданные функции тепловых потоков, Вт/м^2, на соответствующих границах прямоугольной области D; $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $f(x,y,t)$ — непрерывные ограниченные функции в прямоугольной области D в зависимости от координат x, y, м и времени t, с; $U(x,y,t)$, $v_1(x,y,t)$, $v_2(x,y,t)$ °С — функции распределений температур в прямоугольной области $D=\{(x,y)|x_1\le x\le x_2,\ y_1\le y\le y_2\}$, в зависимости от координат x, y, м и времени t, с; $\hat{u}(x,y,t)$, $\hat{U}(x,y,t)$, °С — функция распределения температуры в прямоугольной области $\hat{D}=\{(x,y)|x_1\le x\le x_2,\ y_1\le y\le y_2\}$, в зависимости от координат x, y, м и времени t, с; $\hat{\mu}_{1_1}(t), \hat{\mu}_{1_2}(t), \hat{\mu}_i(t),\ i=\overline{2,4}$ — заданные функции тепловых потоков, Вт/м^2, на соответствующих границах прямоугольной области $\hat{D}$; $\hat{\varphi}(x,y)$ — непрерывная ограниченная функция в прямоугольной области $\hat{D}$; $H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ 1, & x>0.\end{cases}$ — симметрическая единичная функция Хевисайда.

Литература

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 599 с.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.
3. Погорілий Т. М., Мирончук В. Г. Знаходження розв’язку однорідного рівняння теплопровідності з однорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою для двовимірного випадку в аналітичному вигляді // Програма і матеріали 77-ої наукової конференції молодих учених, аспірантів і студентів «Наукові здобутки молоді — вирішенню проблем харчування людства у XXI столітті», 11-12 квітня 2011 р. — Частина II. — К.: НУХТ, 2011. — С. 74.
4. Погорілий Т. М., Мирончук В. Г. Знаходження розв’язку неоднорідного рівняння теплопровідності з однорідними граничними умовами другого роду та однорідною початковою умовою для двовимірного випадку в аналітичному вигляді // Програма і матеріали 77-ої наукової конференції молодих учених, аспірантів і студентів «Наукові здобутки молоді — вирішенню проблем харчування людства у XXI столітті», 11-12 квітня 2011 р. — Частина II. — К.: НУХТ, 2011. — С. 74–75.
5. Корн Г., Корн Т., Справочник по математике (для научных сотрудников и инженеров). — М.: Наука, 1974. — 832 с.
6. Куценко О. Г., Шворак М. А., Погорілий Т. М. Аналітичний розв’язок нестаціонарної задачі термопружності для двошарового циліндру // International Conference «Analitic methods of mechanics and complex analysis» dedicated to N. A. Kilchevskii and V. A. Zmorovich on the occasion of their birthday centenary: Abstracts. — Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2009. — P. 71–72.