

*Бухмиров В.В., Крупенников С.А., Ракутина Д.В., Солнышкова Ю.С.*

## ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЗОНАЛЬНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА РАДИАЦИОННОГО И СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Одной из актуальных проблем вычислительной теплофизики является разработка эффективных численных методов, позволяющих получать решение задачи с заданной точностью при минимальном объеме вычислений. Именно в этом направлении происходит развитие зональных методов, нашедших широкое применение в инженерных расчетах радиационного и сложного (радиационно-конвективного, радиационно-кондуктивного) теплообмена [1-3].

### *Основные положения зонального метода*

Идея зонального метода заключается в разбиении системы, в которой происходит теплообмен, на объемные и поверхностные зоны, т.е. достаточно малые участки, в пределах которых все теплофизические характеристики можно приближенно считать постоянными. Пусть число поверхностных зон равно  $m$ , объемных  $n$ , а общее число зон  $l = m + n$ .

В пределах каждой поверхностной зоны ( $i = 1 \dots m$ ), имеющей площадь  $F_i$ , будем считать постоянными температуру  $T_i$ , степень черноты  $\varepsilon_i$ , поглощательную способность  $A_i$  и плотность потока падающего излучения  $q_i^{\text{пад}}$ . Тогда в пределах каждой зоны постоянные значения будут иметь также плотности потоков собственного, поглощенного, отраженного, эффективного и результирующего излучения:

$$q_i^{\text{соб}} = \varepsilon_i \sigma_0 T_i^4, \quad q_i^{\text{погл}} = A_i q_i^{\text{пад}}, \quad q_i^{\text{отр}} = (1 - A_i) q_i^{\text{пад}},$$

$$q_i^{\text{эф}} = q_i^{\text{соб}} + q_i^{\text{отр}}, \quad q_i^{\text{р}} = q_i^{\text{погл}} - q_i^{\text{соб}} = q_i^{\text{пад}} - q_i^{\text{эф}};$$

где  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана-Больцмана. Собственное и эффективное излучение поверхностных зон будем считать диффузным.

В пределах каждой объемной зоны ( $i = m+1 \dots l$ ), имеющей объем  $V_i$  и ограниченной воображаемой поверхностью  $F_i$ , постоянными считают температуру среды  $T_i$  и другие факторы, влияющие на ее радиационные характеристики, в частности, содержание поглощающе-излучающих компонентов. Объемное излучение среды заменяют диффузным излучением поверхности  $F_i$ , которой приписывают степень черноты, обеспечивающую действительное значение потока собственного излучения объемной зоны.

При пренебрежении рассеянием излучения отражательная способность объемной зоны полагается равной нулю. В этом случае  $q_i^{\text{эф}} = q_i^{\text{соб}}$  и  $q_i^{\text{р}} = q_i^{\text{погл}} - q_i^{\text{соб}}$ .

Проведем также классификацию зон в зависимости от того, какая величина – температура или поток результирующего излучения – является заданной по условию. Для зон 1-го рода будем считать заданной температуру, для зон 2-го рода – поток результирующего излучения. Для остальных зон (зоны 3-го рода), возникающих в случае сложного теплообмена, записывают уравнения теплового баланса, каждое из которых связывает поток результирующего излучения с температурами и может быть представлено в следующем виде:

$$Q_i^{\text{р}} + \sum_k h_{ki} T_k + h_i^0 = 0, \quad (1)$$

где  $h_{ki}, h_i^0$  – коэффициенты, определяющие конвективные и кондуктивные тепловые потоки; знак  $\Sigma$  означает суммирование по всем зонам. Обозначим число зон 1-го рода символом  $l_1$ , 2-го рода –  $l_2$  и 3-го рода –  $l_3$  ( $l = l_1 + l_2 + l_3$ ).

Целью расчета является определение:

- потоков результирующего излучения  $Q_i^p$  для зон 1-го рода;
- температур  $T_i$  (или потоков собственного излучения  $Q_i^{cob} = \varepsilon_i \sigma_0 T_i^4 F_i$ ) для зон 2-го рода; – потоков результирующего излучения  $Q_i^p$  и температур  $T_i$  для зон 3-го рода.

В основе различных вариантов зонального метода лежат соотношения вида

$$Q_i^{пад} = \sum_k Q_k Z_{ki}, \quad i = 1 \dots l, \quad (2)$$

представляющие потоки излучения, падающие на каждую  $i$ -ую зону, в виде разложения по некоторой базисной совокупности потоков излучения  $Q_k$  ( $k = 1 \dots l$ ) всех зон, образующих рассматриваемую систему;  $Z_{ki}$  – коэффициенты разложения.

При применении *классического* зонального метода в качестве базисной используют совокупность потоков эффективного излучения ( $Q_k \equiv Q_k^{эф}$ ), и соотношение (2) принимает вид

$$Q_i^{пад} = \sum_k Q_k^{эф} \psi_{ki}, \quad i = 1 \dots l, \quad (3)$$

где  $\psi_{ki}$  – обобщенные угловые коэффициенты излучения, выражающие вклад потока эффективного излучения  $k$ -ой зоны в поток, падающий на  $i$ -ую зону с учетом поглощения части излучения средой.

В рамках *резольвентного* зонального метода потоки эффективного излучения исключают из рассмотрения, а падающие потоки связывают непосредственно с потоками собственного излучения ( $Q_k \equiv Q_k^{cob}$ ):

$$Q_i^{пад} = \sum_k Q_k^{cob} \Psi_{ki}, \quad i = 1 \dots l, \quad (4)$$

где  $\Psi_{ki}$  – разрешающие обобщенные угловые коэффициенты, характеризующие вклад потока собственного излучения  $k$ -ой зоны в поток, падающий на  $i$ -ую зону с учетом отражения излучения поверхностными зонами и поглощения части излучения средой.

Физический смысл разрешающих обобщенных угловых коэффициентов излучения наглядно выражается системой уравнений

$$\Psi_{ki} = \psi_{ki} + \sum_j \psi_{kj} R_j \Psi_{ji}, \quad (5)$$

в которой через  $R_j$  обозначена отражательная способность  $j$ -ой зоны.

В рамках *модифицированного резольвентного* зонального метода [4,5] в качестве базисных потоков используют потоки собственного излучения для зон 1-го и 3-го рода и потоки результирующего излучения (взяты с обратным знаком) для зон 2-го рода:

$$Q_k = \begin{cases} Q_k^{cob}, & k = 1 \dots l_1, l_2 + 1 \dots l; \\ -Q_k^p, & k = l_1 + 1 \dots l_2. \end{cases}$$

При этом коэффициенты  $Z_{ki}$  в соотношении (2) – модифицированные разрешающие обобщенные угловые коэффициенты излучения – определяют решением системы уравнений

$$Z_{ki} = \psi_{ki} + \sum_j \psi_{kj} P_j Z_{ji}, \quad (6)$$

в которой

$$P_k = \begin{cases} R_k & \text{для зон 1-го и 3-го рода;} \\ 1 & \text{для поверхностных зон 2-го рода;} \\ A_k & \text{для объемных зон 2-го рода.} \end{cases}$$

Будем использовать в дальнейшем изложении серое приближение, в рамках которого считают, что для каждой зоны поглощательная способность равна степени черноты:  $A_i = \varepsilon_i$ , а отражательная способность поверхностных зон  $R_i = 1 - \varepsilon_i$ . Кроме этого, будем считать, что все радиационные характеристики (степени черноты) и обобщенные угловые коэффициенты излучения не зависят от неизвестных температур зон 2-го и 3-го рода.

### *Решение задач чисто радиационного теплообмена*

Рассмотрим применение различных вариантов зонального метода для расчета радиационного теплообмена в диатермической среде или в поглощающей и излучающей неподвижной среде – при отсутствии зон 3 рода.

#### *Классический зональный метод*

На первом этапе расчета для всех зон определяют потоки эффективного излучения путем решения следующей системы из  $l$  линейных зональных уравнений:

$$\text{— для поверхностных зон первого рода} \quad Q_i^{\text{эф}} = (1 - \varepsilon_i) \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} + Q_i^{\text{соб}}; \quad (7)$$

$$\text{второго рода} \quad Q_i^{\text{эф}} = \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} - Q_i^{\text{п}}; \quad (8)$$

$$\text{— для объемных зон первого рода} \quad Q_i^{\text{эф}} = Q_i^{\text{соб}}; \quad (9)$$

$$\text{второго рода} \quad Q_i^{\text{эф}} = \varepsilon_i \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} - Q_i^{\text{п}}; \quad (10)$$

Это становится возможным, поскольку в данном случае потоки эффективного излучения не зависят от неизвестных температур зон 2-го рода.

На втором этапе используют явные формулы, по которым определяют для зон 1-го рода потоки результирующего излучения, а для зон 2-го рода потоки собственного излучения (с последующим расчетом температур):

$$\text{— для поверхностных зон 1-го рода} \quad Q_i^{\text{п}} = (\varepsilon_i Q_i^{\text{эф}} - Q_i^{\text{соб}}) / R_i; \quad (11)$$

$$\text{— для поверхностных зон 2-го рода} \quad Q_i^{\text{соб}} = \varepsilon_i Q_i^{\text{эф}} - R_i Q_i^{\text{п}}; \quad (12)$$

$$\text{— для объемных зон 1-го рода} \quad Q_i^{\text{п}} = \varepsilon_i \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} - Q_i^{\text{соб}}; \quad (13)$$

$$\text{— для объемных зон 2-го рода} \quad Q_i^{\text{соб}} = Q_i^{\text{эф}}. \quad (14)$$

#### *Резольвентный зональный метод*

После определения разрешающих угловых коэффициентов излучения рассчитывают неизвестные потоки собственного излучения зон 2-го рода путем решения системы из  $l_2$  линейных зональных уравнений, имеющих одинаковый вид, как для поверхностных, так и для объемных зон ( $\delta_{ki}$  – символ Кронекера):

$$\sum_k Q_k^{\text{соб}} (\Psi_{ki} \varepsilon_i - \delta_{ki}) - Q_i^{\text{п}} = 0, \quad (15)$$

Далее по формулам

$$Q_i^p = \sum_k Q_k^{\text{собр}} (\Psi_{ki} \varepsilon_i - \delta_{ki}) \quad (16)$$

рассчитывают потоки результирующего излучения для зон 1-го рода.

#### *Модифицированный резольвентный зональный метод*

После определения модифицированных разрешающих угловых коэффициентов излучения необходимость в решении системы зональных уравнений отпадает, и расчет проводят по явным формулам:

$$\text{— для зон 1-го рода} \quad Q_i^p = \varepsilon_i \sum_k Q_k Z_{ki} - Q_i^{\text{собр}}; \quad (17)$$

$$\text{— для зон 2-го рода} \quad Q_i^{\text{собр}} = \varepsilon_i \sum_k Q_k Z_{ki} - Q_i^p. \quad (18)$$

#### *Вывод №1.*

Если считать, что объем вычислений  $W$ , необходимый для реализации зонального метода, пропорционален числу совместно решаемых зональных уравнений, то получим, что для классического зонального метода  $W \sim l$ , для резольвентного зонального метода – с учетом расчета разрешающих угловых коэффициентов излучения –  $W \sim l + l_2$ , для модифицированного резольвентного зонального метода – с учетом расчета модифицированных разрешающих угловых коэффициентов излучения –  $W \sim l$ . Таким образом, при решении задач чисто радиационного теплообмена классический зональный метод по эффективности не уступает или даже превосходит другие возможные способы расчета.

#### ***Решение задач сложного теплообмена***

Особенности расчета сложного теплообмена обусловлены наличием зон 3-го рода, появляющихся, в частности, при учете конвективного переноса тепла движущимися газами и переносом тепла теплопроводностью в ограждениях рабочего пространства высокотемпературных теплотехнологических и теплоэнергетических агрегатов.

#### *Классический зональный метод*

Систему зональных уравнений (7) – (10) относительно потоков эффективного излучения дополняют соотношениями, содержащими неизвестные температуры:

— для поверхностных зон 3-го рода

$$Q_i^{\text{эф}} = \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} + \sum_k h_{ki} T_k + h_i^0; \quad (19)$$

— для объемных зон 3-го рода

$$Q_i^{\text{эф}} = \varepsilon_i \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} + \sum_k h_{ki} T_k + h_i^0. \quad (20)$$

Поэтому нужно связать эти температуры с потоками эффективного излучения:

— для поверхностных зон 2-го и 3-го рода по формуле (12)

$$T_i = \sqrt[4]{\left( Q_i^{\text{эф}} - \frac{R_i}{\varepsilon_i} Q_i^p \right) / (\sigma_0 F_i)}; \quad (21)$$

$$T_i = \sqrt[4]{\left[ Q_i^{\text{эф}} - \frac{R_i}{\varepsilon_i} \left( \sum_k h_{ki} T_k + h_i^0 \right) \right] / (\sigma_0 F_i)}; \quad (22)$$

— для объемных зон 2-го и 3-го рода по формуле (14)

$$T_i = \sqrt[4]{Q_i^{\text{эф}} / (\sigma_0 F_i)} , \quad (23)$$

и все уравнения (7) – (10), (19) – (23) решать совместно, применяя, например, метод простой итерации. В результате главная привлекательная черта классического зонального метода – двухэтапность расчетной схемы, обусловленная возможностью определения эффективных потоков независимо от неизвестных температур – оказывается утраченной.

Более того, поскольку метод простой итерации при решении больших систем *нелинейных* уравнений обладает чрезвычайно узкой областью сходимости, а число уравнений в рассматриваемой системе равно  $l + l_2 + l_3$ , при достаточно большом числе зон становится сомнительной сама возможность получения численного решения.

#### *Резольвентный зональный метод*

Выражая потоки собственного излучения через зональные температуры и вводя коэффициенты радиационного теплообмена  $a_{ki} = \varepsilon_k \sigma_0 F_k (\Psi_{ki} \varepsilon_i - \delta_{ki})$ , из (15) получим:

$$\text{— для зон 2-го рода} \quad \sum_k a_{ki} T_k^4 - Q_i^{\text{п}} = 0 ; \quad (24)$$

$$\text{— для зон 3-го рода} \quad \sum_k a_{ki} T_k^4 + \sum_k h_{ki} T_k + h_i^0 = 0 ; \quad (25)$$

Поскольку в уравнениях (24) и (25) неизвестные температуры зон 2-го и 3-го рода фигурируют в явном виде, решение полученной системы из  $l_2 + l_3$  нелинейных зональных уравнений может быть найдено высокоэффективным итерационным методом Ньютона.

После этого потоки результирующего излучения для зон 1-го рода определяются по формулам:

$$Q_i^{\text{п}} = \sum_k a_{ki} T_k^4 . \quad (26)$$

#### *Модифицированный резольвентный зональный метод*

Выражая потоки собственного излучения через зональные температуры и вводя модифицированные коэффициенты радиационного теплообмена  $a'_{ki} = \varepsilon_k \sigma_0 F_k (Z_{ki} \varepsilon_i - \delta_{ki})$ , получим для зон 3-го рода:

$$\varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=l_1+l_2} Q_k Z_{ki} + \sum_{k=l_1+l_2+1}^l (a'_{ki} T_k^4 + h_{ki} T_k) + h_i^0 = 0 . \quad (27)$$

После решения системы из  $l_3$  нелинейных зональных уравнений (27) методом Ньютона по формулам (17) и (18) находят потоки результирующего излучения для зон 1-го рода и потоки собственного излучения для зон 2 рода.

#### *Вывод №2.*

При решении задач сложного теплообмена преимущество резольвентных зональных методов перед классическим заключается в их более высокой эффективности, обусловленной существенным уменьшением размерности системы нелинейных зональных уравнений (с  $l + l_2 + l_3$  до  $l_2 + l_3$  или до  $l_3$ ) и возможностью ее решения с помощью итерационного метода Ньютона.

### Упрощенные зональные методы

Другое направление повышения эффективности зональных методов связано с принятием дополнительных упрощающих допущений. Так, при расчете температуры объемной зоны (см. рис. 1) излучение смежных с ней объемных зон можно заменить излучением условных абсолютно черных поверхностей – “граней” (показанных на рис. 1 пунктиром), температуры которых задаются таким образом, чтобы обеспечить действительные значения потоков результирующего излучения на границах рассматриваемой объемной зоны. Взаимное согласование результатов расчета РТО в отдельных объемных зонах производится с помощью специальной итерационной процедуры. Существенное упрощение расчета обусловлено исключением из рассмотрения обобщенных угловых коэффициентов излучения между зонами, разделенными более чем одной объемной зоной. Такой подход может быть реализован как в классической, так и в резольвентной (более эффективной) постановке [6,7].

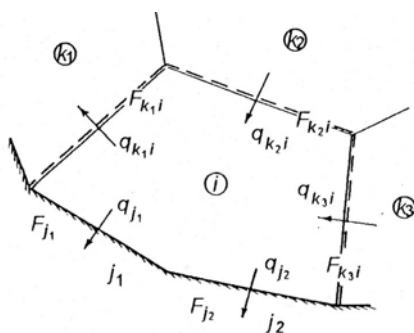


Рис. 1. К расчету РТО в  $i$ -ой объемной зоне

$k_1, k_2, k_3$  – номера смежных объемных зон;  $j_1, j_2$  – номера смежных поверхностных зон;  $F_j$  – площади поверхностных зон;  $F_{ki}$  – площади граней, отделяющих  $i$ -ую зону от смежных с ней объемных зон;  $q_j$  – плотность потока результирующего излучения, проходящего через  $j$ -ую поверхностную зону;  $q_{ki}$  – плотность потока результирующего излучения, проходящего через  $k$ -ую грань.

Вывод №3. Преимуществом упрощенного зонального метода перед его традиционными модификациями является не только упрощение расчетной схемы и необходимость определения обобщенных угловых коэффициентов излучения лишь в изотермических объемных зонах, но и существенное сокращение числа этих коэффициентов.

### Применение зональных методов для решения практических задач технической физики

#### 1. Двухщелевая электрическая печь сопротивления для обжига абразивных изделий [8]

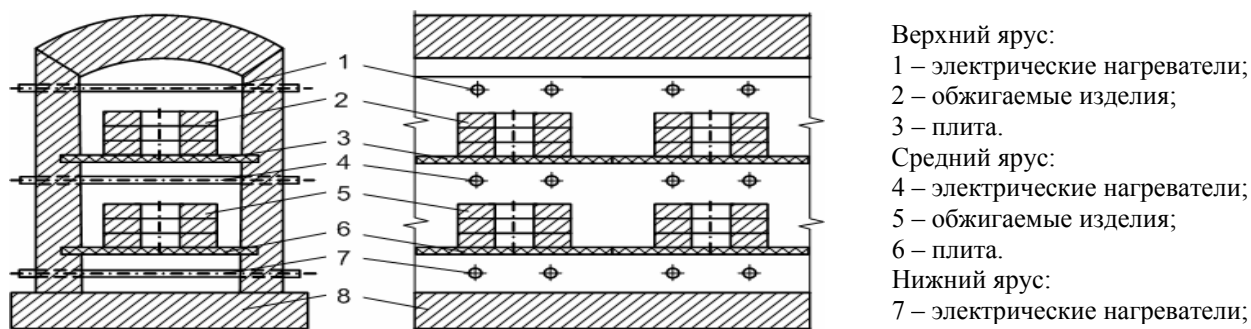


Рис. 2. Схема щелевой электрической печи сопротивления

Схема печи для обжига абразивных изделий представлена на рис. 2. Математическое моделирование тепловой работы данной печи основано на совместном решении задач внешнего и внутреннего теплообмена.

В соответствии с заданным по технологии режимом термообработки в печи было выделено 28 расчетных участков, в пределах которых температура изменяется не более чем на  $100^{\circ}\text{C}$ . На каждом расчетном участке верхнего и среднего ярусов было выделено по пять расчетных зон (рис. 3). Торцевые зоны первого и последнего участков заменяем условными абсолютно черными поверхностями с температурой равной температуре окружающей среды.

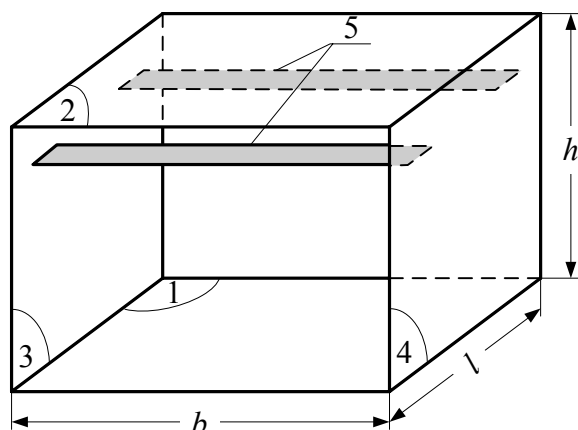


Рис.3. Схема расчетного участка:  
1 – тепловоспринимающая поверхность нагреваемых изделий;  
2 – поверхность свода печи;  
3, 4 – боковая поверхность обмуровки;  
5 - поверхность электрических нагревателей

Расчет внешнего (чисто радиационного) теплообмена выполнен на основе резольвентного зонального метода. Более высокая эффективность этого метода по сравнению с классическим зональным методом в данном случае обусловлена тем, что при принятии допущения о независимости степеней черноты элементов рабочего пространства печи от температуры разрешающие угловые коэффициенты излучения, одинаковые для каждого (кроме торцевых) расчетного участка, вычисляются один раз и не изменяются в процессе итерационного решения сопряженной задачи теплообмена.

Результаты расчета температурного поля абразивных изделий представлены на рис. 4.

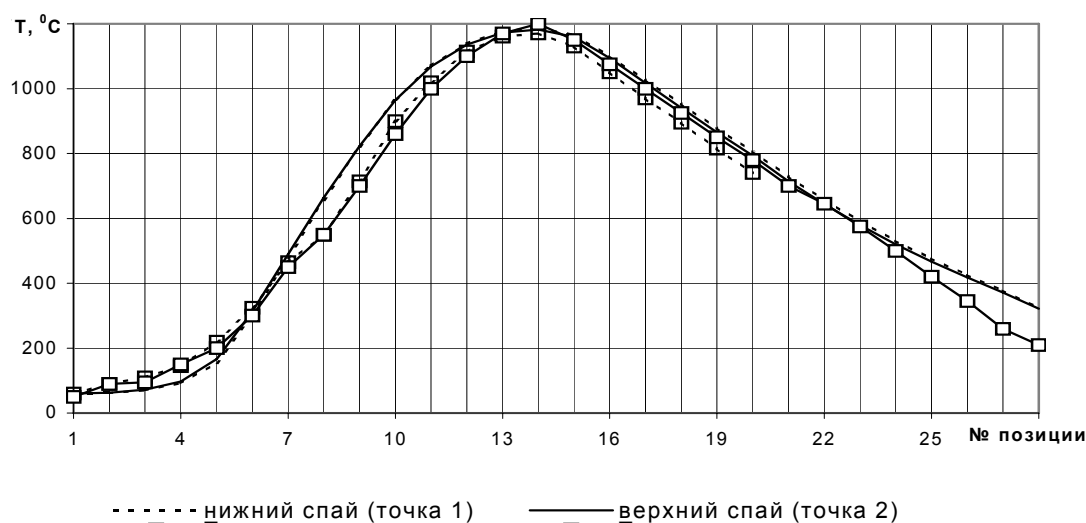


Рис. 4. Расчетные и экспериментальные значения температур в двух точках садки  
(□ – экспериментальные данные; — — — результаты расчета)

## 2. Туннельная газовая печь для обжига керамических огнеупорных изделий [9]

Схема туннельной печи для обжига керамических огнеупорных изделий представлена на рис. 5.

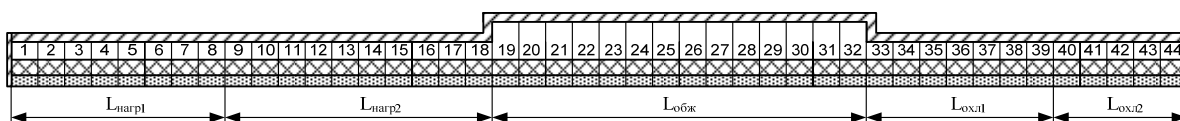


Рис. 5. Разбиение рабочего пространства туннельной печи на расчетные участки: зона нагрева: неохлаждаемая (нагр1) и охлаждаемая (нагр2) части свода; зона обжига: обж; зона охлаждения: неохлаждаемая (охл1) и охлаждаемая (охл2) части свода.

Рабочее пространство туннельной печи разбито на 44 расчетных участка, в каждом из которых выделено четыре поверхностных и одна объемная расчетные зоны. Зона 1 соответствует тепловоспринимающей поверхности обжигаемых изделий, зона 2 – поверхности свода печи, зоны 3 и 4 – боковым поверхностям кладки, зона 5 – газовому объему. Для первого и последнего расчетных участков введены дополнительные зоны, соответствующие поверхностям футерованных заслонок печи.

В связи с необходимостью учета сложного характера внешнего теплообмена (наряду с радиационным переносом тела происходит перенос тепла конвекцией, обусловленный движением продуктов горения в зонах нагрева и обжига и воздуха в зоне охлаждения) для решения задачи применен резольвентный зональный метод.

Некоторые результаты расчета представлены на рис. 6.

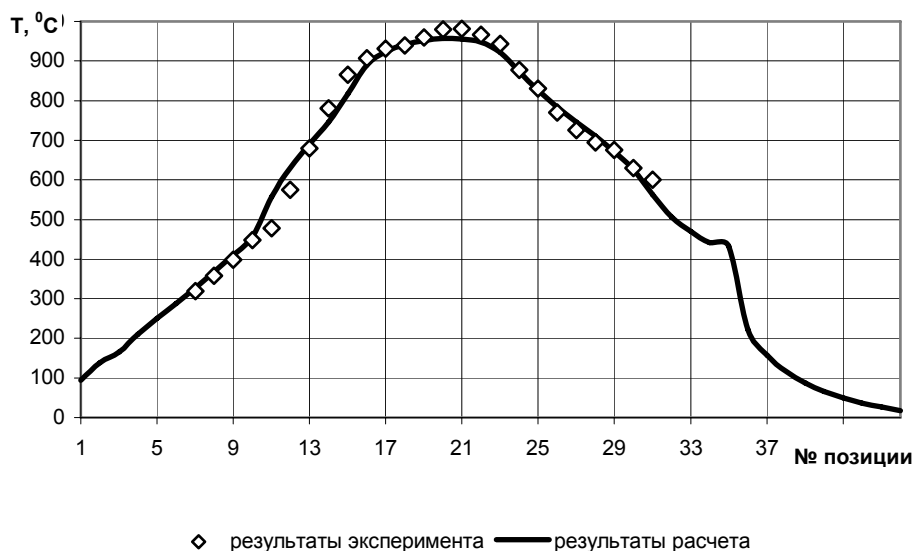


Рис. 6. Расчетные и экспериментальные значения температур в кирпичной садке.

## 3. Печь для термической обработки валов прокатных станков [10]

Схема расположения термообрабатываемых изделий в печи показана на рис. 7. Для учета реального расположения валов в садке, неизотермичности газового объема и конструктивных особенностей печи выделено 8 объемных зон, показанных на этом же рисунке. Расчет радиационно-конвективного теплообмена в рабочем пространстве печи выполнен упрощенным зональным методом.



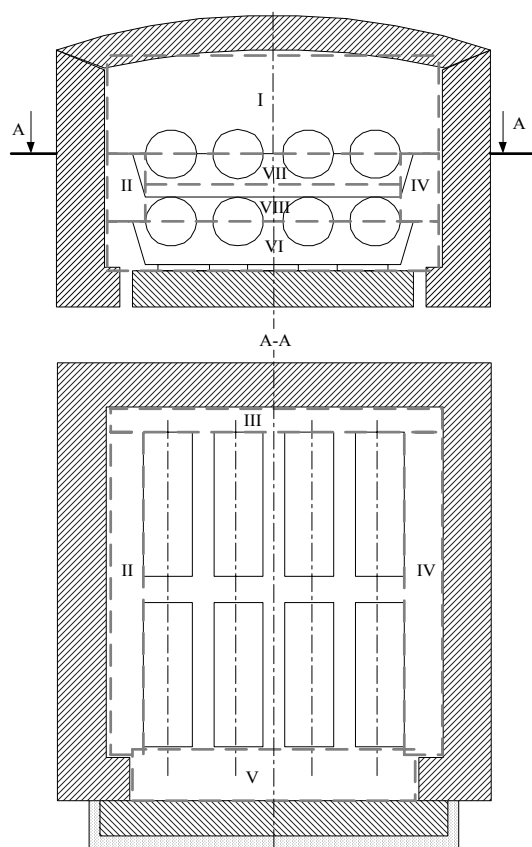


Рис. 7. Схема расположения изделий и расчетных зон

Сопоставление расчетного температурного поля валов с экспериментальными данными показано на рис. 8.

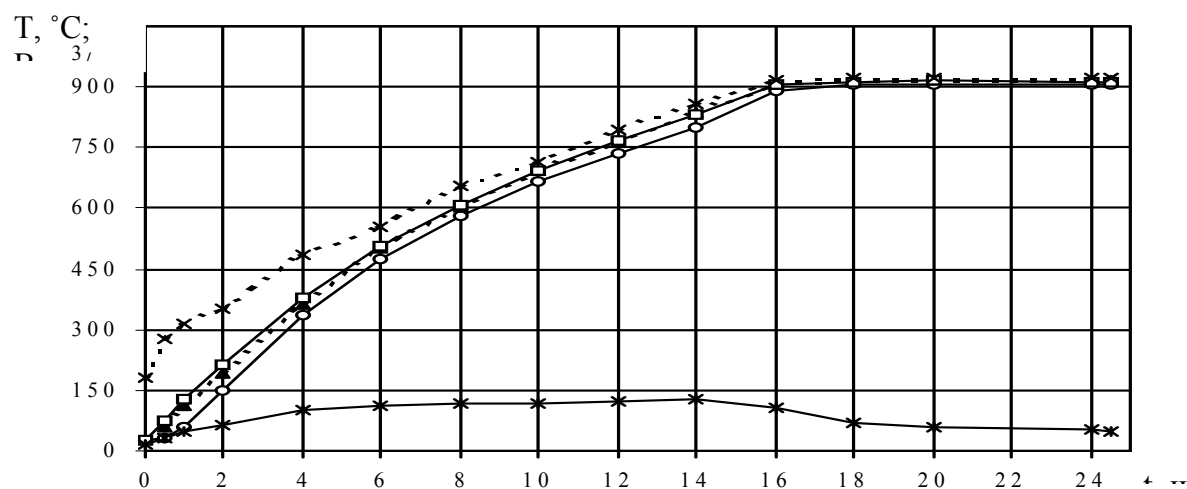


Рис. 8. Изменение температуры в объеме садки (--x--), на поверхности вала (- - □ - - вверху, —▲— внизу), на оси вала (—o—) и расхода топлива (—ж—) в процессе термической обработки

### Выводы.

1. Зональные методы расчета радиационного и сложного теплообмена позволяют находить решение практически любой задачи по определению температурных полей и тепловых потоков в рабочем пространстве теплотехнологических и теплоэнергетических агрегатов.

2. В каждом конкретном случае выбор наиболее эффективной модификации зонального метода зависит от постановки задачи.

3. Дальнейшее развитие зональных методов требует автоматизации процедуры выбора оптимального числа зон и расчета коэффициентов радиационного обмена.

### Литература

1. Арутюнов В.А., Бухмиров В.В., Крупенников С.А. *Металлургическая теплотехника: развитие теоретического раздела* // Изв. вузов. Черная металлургия, 2005, №10, С. 58-62.
2. Арутюнов В.А., Бухмиров В.В., Крупенников С.А. *Математическое моделирование тепловой работы промышленных печей.* – М.: Металлургия, 1990, 239 с.
3. Крупенников С.А. *Зональный метод расчета радиационного и сложного теплообмена: основные положения и способы численной реализации* // Изв. вузов. Черная металлургия, 2006, №3. – С.59-62.
4. Крупенников С.А. *Модификация зонального метода для расчета радиационного теплообмена* // Изв. вузов. Черная металлургия, 1992, №1, С.102–103.
5. Крупенников С.А. *Применение модифицированного зонального метода для расчета сложного теплообмена* // Изв. вузов. Черная металлургия, 1995, №5, С.46–49.
6. Бухмиров В.В., Крупенников С.А. *Упрощенный зональный метод расчета радиационного теплообмена в поглощающей и излучающей среде* // Изв. вузов. Черная металлургия, 1999, №1. – С.68-70.
7. Бухмиров В.В., Крупенников С.А. *Оценка погрешности упрощенного метода расчета радиационного теплообмена* // Изв. вузов. Черная металлургия, 1999, №4. – С.75-76.
8. Бухмиров В.В., Крупенников С.А., Ракутина Д.В. *Решение внешней задачи теплообмена в щелевой электрической печи* // Известия вузов. Черная металлургия. – 2005. - №1. С. 78-79.
9. Buhmirov V.V., Rakutina D.V. *An application of zonal methods to the account of complicated heat exchange in heat-technological installations* // *Advances in Heat Transfer: Proceeding of the Baltic Heat Transfer Conference.* – St. Petersburg: Saint Petersburg state polytechnical university, 2007. Vol. 2. – P. 619-620.
10. Бухмиров В.В., Крупенников С.А., Носова С.В. *Математическая модель нагревательной печи периодического действия* // *Металлургическая теплотехника: Сб. научн. тр. Национальной металлургической академии Украины.* – Днепропетровск: НметАУ, 2002. Т.5. – С.25-32