УДК 536.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

А. В. Жибер, Н. М. Цирельман

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

Аннотация

Проведено исследование температурных полей в пространственно-неоднородной среде при зависящих от температуры теплофизических свойствах материала. При этом использованы точечные и нелокальные преобразования уравнения нестационарной теплопроводности. Даны примеры применения теории для различного рода граничных условий при наличии сферической симметрии.

Введение

Большое количество работ посвящено исследованию нелинейных задач нестационарной теплопроводности в однородной среде [1, 2]. Однако ряд изделий различного технического и технологического назначения изготавливается из пространственно-неоднородного материала, объемная теплоемкость которого C и коэффициент теплопроводности λ зависят от искомой температуры T и координат x_1, x_2, x_3. В этом случае уравнение процесса теплопереноса, развивающегося во времени t, относительно температуры $T = T(x_1, x_2, x_3, t)$ при выборе переменной $r = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$ таково:

$$C(T,r)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left[B_1(r)\lambda(T,r)\operatorname{grad} T\right] . \tag{1}$$

Представим функции $C(T, r)$ и $\lambda(T, r)$ в виде произведения функции координаты r на функцию температуры T и вместо (1) рассмотрим следующее нелинейное уравнение теплопроводности

$$A(r)C(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left[B(r)\lambda(T)\operatorname{grad} T\right]. \tag{2}$$

1. Точечные преобразования уравнения для тел со сферической симметрией

Рассмотрим новую неизвестную функцию $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$, связанную с искомой температурой соотношением

$$T = f(u) . \tag{3}$$

Тогда с использованием замены (3) уравнение (2) принимает вид

$$A(r)C(f(u))\, f'(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[B(r)\lambda(f(u))f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]. \tag{4}$$

Теперь функцию (3) выберем таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\lambda(f(u))f'(u) = 1 , \tag{5}$$

и введем функцию

$$\varphi(u) = C(f(u))\,f'(u)\,. \tag{6}$$

Следовательно, в силу (5) и (6) уравнение (4) приводится к следующему виду

$$A(r)\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial t} = B(r)\Delta u + \sum_{i=1}^{3} B'(r)\frac{x_i}{rx}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\,. \tag{7}$$

Рассмотрим решения уравнения (7), обладающие сферической симметрией

$$u = u(r,t)\,. \tag{8}$$

Подстановка функции (8) в уравнение (7) дает уравнение следующего вида

$$A(r)\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial t} = B(r)\left[u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right] + B'(r)u_r$$

или

$$\frac{A(r)}{B(r)}\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left[\frac{2}{r} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right]\frac{\partial u}{\partial r}\,. \tag{9}$$

2. Приведение уравнения (9) к линейному виду

Выясним, при каких функциях $A(r)$, $B(r)$ и $\varphi(u)$ уравнение (9) нелокальным преобразованием типа

$$u(r,t) = \omega(y,t), \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \psi(r,\omega), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = h\left(r, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \tag{10}$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\,. \tag{11}$$

Отметим, что почти обратимые преобразования вида (10) рассматривались в работах [3 – 5] при классификации эволюционных уравнений второго порядка.

Согласно формулам (10), имеем систему равенств

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial y}h + \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial \omega}{\partial y}\psi, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\psi^2 + \frac{\partial \omega}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\psi\right). \tag{12}$$

При использовании формул (10) и (12) уравнение (9) в новых переменных примет вид

$$\frac{A(r)}{B(r)}\varphi(\omega)\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}h + \frac{\partial \omega}{\partial t}\right) = \psi^2\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\psi\right) + \left[\frac{2}{r} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right]\frac{\partial \omega}{\partial y}\psi$$

и, следовательно, в силу (11) получаем последовательно

$$\frac{A(r)}{B(r)}\varphi(\omega) = \psi^2(r,\omega) \tag{13}$$

$$\frac{A(r)}{B(r)}\varphi(\omega)h=\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}\psi+\psi\left[\frac{2}{r}+\frac{B'(r)}{B(r)}\right]. \tag{14}$$

К условиям (13), (14) с привлечением (10) дополнительно можно присоединить условие совместности вида

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r\partial t}=\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial r}\ ,$$

которое можно записать следующим образом

$$\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\left[\frac{\partial\omega}{\partial y}h+\frac{\partial\omega}{\partial t}\right]=\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{\partial h}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}\psi+\frac{\partial h}{\partial\omega_y}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\psi\ .$$

Последнее соотношение, согласно уравнению (11), эквивалентно равенствам

$$\frac{\partial\psi}{\partial\omega}=\psi\frac{\partial h}{\partial\omega_y}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\omega}h=\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{\partial h}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}\psi\ . \tag{16}$$

Таким образом, нелинейное уравнение (9) преобразованием (10) сводится к линейному уравнению (11), если функции ψ и h удовлетворяют соотношениям (13) – (16).

Из равенства (15) получаем

$$h=\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\cdot\frac{1}{\psi}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}+p(r,\omega) \tag{17}$$

и тогда, подставляя (17) в (16), будем иметь также

$$\omega_y\psi_w\left[\frac{\psi_w}{\psi}\omega_y+p\right]=\omega_y\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi_w}{\psi}\right)+p_r+\omega_y\psi\left[p_w+\omega_y\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\psi_w}{\psi}\right)\right].$$

Следовательно, верны равенства

$$\frac{\psi_w^2}{\psi^2}=\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\psi_w}{\psi}\right),\quad p_r=0,\quad \psi_w p=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi_w}{\psi}\right)+\psi p_w\,,$$

и, таким образом, имеем

$$\frac{\psi_w}{\psi}=\frac{1}{C(r)-\omega},\quad \psi=\frac{C_1(r)}{C(r)-\omega},\quad p=p(\omega),$$

$$p(\omega)\frac{C_1(r)}{(C(r)-\omega)^2}=-\frac{C'(r)}{(C(r)-\omega)^2}+p'(\omega)\frac{C_1(r)}{(C(r)-\omega)}, \tag{18}$$

где $C(r)$, $C_1(r)$ – неопределенные функции интегрирования.

Далее, введя обозначение

$$\frac{2}{r}+\frac{B'(r)}{B(r)}=q(r),$$

получаем соотношение (14) в силу (13) таким

$$h=\frac{\psi_r}{\psi^2}+\frac{\omega_y\psi_w}{\psi}+\frac{q(r)}{\psi}. \tag{19}$$

Сравнивая между собой (17) и (19), получаем равенство

$$p(\omega)=\frac{\psi_r}{\psi^2}+\frac{q(r)}{\psi}\ , \tag{20}$$

которое с учетом формулы (18) для функции ψ перепишем следующим образом:

$$p(\omega)=\left[\frac{C_1'(r)}{C(r)-\omega}-\frac{C_1(r)C'(r)}{(C(r)-\omega)^2}\right]\frac{(C(r)-\omega)^2}{C_1^2(r)}+q(r)\frac{C(r)-\omega}{C_1(r)}$$

или

$$p(\omega)=\frac{C_1'(r)}{C_1^2(r)}(C(r)-\omega)-\frac{C'(r)}{C_1(r)}+\frac{q}{C_1(r)}(C(r)-\omega).$$

Поэтому справедливо соотношение

$$p(\omega)=\alpha\omega+\beta, \tag{21}$$

в котором постоянные α и β определяются следующим образом

$$-\frac{C_1'(r)}{C_1^2(r)}-\frac{q}{C_1(r)}=\alpha,\qquad \frac{C_1'(r)}{C_1^2(r)}C(r)-\frac{C'(r)}{C_1(r)}+\frac{q}{C_1(r)}C(r)=\beta\ . \tag{22}$$

Далее, подставляя функцию (21) в соотношение (18), будем иметь

$$(\alpha\omega+\beta)C_1(r)=-C'(r)+\alpha C_1(r)(C(r)-\omega)$$

или

$$\alpha C_1(r)=-\alpha C_1(r),\qquad \beta C_1(r)=-C'(r)+\alpha C_1(r)C(r). \tag{23}$$

Используя формулы (22) и (23) и учитывая, что $\psi\neq 0$, получаем равенства

$$\alpha=0,\quad \beta=-\frac{C'(r)}{C_1(r)},\quad q=-\frac{C_1'(r)}{C_1(r)} \tag{24}$$

и зависимость для расчета $C_1(r)$ в виде

$$C_1(r)=\exp\left[-\int q(r)dr\right]=\exp\left\{-\int\left[\frac{2}{r}+\frac{B'(r)}{B(r)}\right]dr\right\},$$

т. е. имеем

$$C_1(r)=\frac{k}{r^2B(r)},\quad C'(r)=-\beta\frac{k}{r^2B(r)}\quad (k=\mathrm{const})\,. \tag{25}$$

Тогда соотношение (13) в силу (18), (25) таково

$$\frac{A(r)}{B(r)}\varphi(\omega)=\frac{\dfrac{k^2}{r^4B^2(r)}}{\left[\displaystyle\int\frac{\beta k}{r^2B(r)}dr+\omega\right]^2}$$

или

$$\frac{r^4}{k^2}A(r)B(r)\varphi(\omega)=\left[\int\frac{\beta k}{r^2B(r)}dr+\omega\right]^{-2},$$

откуда получаем $\beta = 0$, $C(r) = \mathrm{const}$ и, следовательно, имеем

$$\varphi(\omega)=\frac{\gamma}{(C+\omega)^2}\,,\quad \frac{r^4}{k^2}A(r)B(r)=\frac{1}{\gamma},\quad \gamma=\mathrm{const}\,. \tag{26}$$

Итак, уравнение (9) преобразованием типа (10) приводится к линейному уравнению теплопроводности тогда и только тогда, когда функции $A(r)$, $B(r)$ и $\varphi(u)$ связаны соотношениями (26).

3. Виды линеаризуемых уравнений

Опишем теперь нелинейные уравнения (2), которые для решений, обладающих сферической симметрией, преобразованиями (3) и (10) приводятся к одномерному линейному уравнению (11). Для таких уравнений, согласно формулам (5), (6) и (26), имеем

$$\lambda(f(u))f'(u)=1,\quad C(f(u))f'(u)=\frac{\gamma}{(c+u)^2},\quad A(r)B(r)=\frac{k^2}{\gamma r^4}\,. \tag{27}$$

Обозначим через $F(\xi)$ первообразную функции $\lambda(\xi)$:

$$F'(\xi)=\lambda(\xi)$$

и тогда из первого и второго соотношения (27) последовательно получаем

$$F(f(u))=u,\quad f(u)=F^{-1}(u)$$

и

$$C(f(u))=\frac{\gamma}{(c+u)^2}\lambda(f(u))\,.$$

Таким образом, линеаризуемые уравнения (2) имеют вид:

$$A(r)\frac{\gamma}{[c+F(T)]^2}F'(T)\frac{\partial T}{\partial t}=\mathrm{div}\left[\frac{k^2}{\gamma r^4 A(r)}\lambda(T)\mathrm{grad}\,T\right].$$

Здесь $A(r)$ и $\lambda(T)$ – произвольные функции, $F'(T)=\lambda(T)$, а c,γ, k – постоянные.

Так как c+F(T) также является первообразной, то, заменяя $\frac{\gamma}{k}A(r)$ на $A(r)$, приходим к уравнению

$$\frac{A(r)}{F^2(T)}F'(T)\frac{\partial T}{\partial t}=\mathrm{div}\left[\frac{F'(T)}{r^4 A(r)}\mathrm{grad}\,T\right], \qquad (28)$$

которое линеаризуется при любых функциях $A(r)$ и $F(T)$.

Таким образом, уравнение теплопроводности

$$C(r,T)\frac{\partial T}{\partial t}=\mathrm{div}[\chi(r,T)\mathrm{grad}\,T], \qquad (29)$$

в котором имеем

$$C(r,T)=\frac{A(r)F'(T)}{F^2(T)} \quad \text{и} \quad \chi(r,T)=\frac{F'(T)}{r^4 A(r)}, \qquad (30)$$

точечной заменой (3)

$$u=F(T), \quad T=T(r,t) \qquad (31)$$

преобразовывается к виду

$$\frac{r^4 A^2(r)}{u^2}u_t=u_{rr}-u_r\left(\frac{2}{r}+\frac{A'(r)}{A(r)}\right). \qquad (32)$$

Уравнение (32) с использованием нелокального преобразования типа (10)

$$u(r,t)=v(y,t), \quad \frac{\partial y}{\partial r}=\frac{r^2 A(r)}{v}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\ln v \qquad (33)$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности

$$v_t=v_{yy}\,. \qquad (34)$$

Далее из (33) находим, что

$$y(r,t)=\int_L \frac{\partial y}{\partial\rho}d\rho+\frac{\partial y}{\partial\tau}\partial\tau\,. \qquad (35)$$

Здесь L – кривая, соединяющая точки $M_0(r_0, t_0)$ и $M(r, t)$. В силу (33) и (34) этот интеграл не зависит от пути интегрирования L.

С использованием (33) формулу (35) запишем следующим образом:

$$y(r,t) = \int_L \frac{\rho^2 A(\rho)}{u(\rho,\tau)} d\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2 A(\rho)} d\tau$$

и, наконец, учитывая (31), будем иметь

$$y(r,t) = \int_L \frac{\rho^2 A(\rho)}{F(T(\rho,\tau))} d\rho - \frac{F'(T(\rho,\tau))T_\rho(\rho,r)}{\rho^2 A(\rho)} d\tau . \qquad (36)$$

Отметим, что преобразования типа (10) использовались для решения краевых задач и нахождения точных решений для эволюционных уравнений второго порядка [6 – 12]. Ниже показано применение этих преобразований к краевым задачам для нелинейных уравнений (29), (30).

4. Примеры решения задач нестационарной теплопроводности

4.1. Решения задач нестационарной теплопроводности для граничных условий первого рода

Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения (29) в области

$$\Omega_T = (0,T] \times D,\ D =< M(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \ \mid R_1 < r < R_2 ,\ \ r = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2} ,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$T(r,0) = \varphi(r), \quad R_1 < r < R_2 \qquad (37)$$

и граничным условиям первого рода

$$T(R_1,t) = \varphi_1(t), \quad t > 0, \qquad (38)$$

$$T(R_2,t) = \varphi_2(t), \quad t > 0. \qquad (39)$$

Покажем, что краевая задача (29), (37) – (39) сводится к решению задачи со свободными границами для уравнения теплопроводности. При преобразовании (36) “прямая” $r = R_1$ плоскости r, t перейдет в кривую $y = y_1(t)$ плоскости y, t, а “прямая” $r = R_2$ в кривую $y = y_2(t)$ (рис. 1 и 2):

$$y_1(t) = y(R_1,t) = -\int_0^t \frac{F'(T(R_1,\tau))T_\rho(R_1,\tau)}{R_1^2 A(R_1)} d\tau , \qquad (40)$$

$$y_2(t) = y(R_2,t) = -\int_0^t \frac{F'(T(R_2,\tau))T_\rho(R_2,\tau)}{R_2^2 A(R_2)} d\tau + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2 A(\rho)}{F(T(\rho,0))} d\rho . \qquad (41)$$

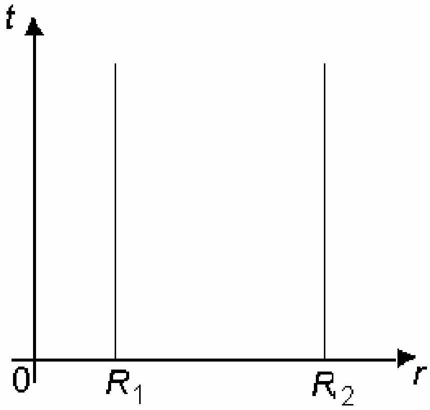

Рис. 1

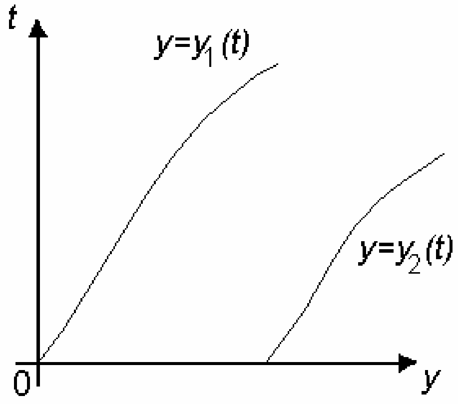

Рис. 2

Далее, положим

$$y(r) = y(r,0) = \int_{R_1}^{r} \frac{\rho^2 A(\rho)}{F(T(\rho,0))} d\rho, \tag{42}$$

и теперь рассмотрим краевую задачу вида

$$v_t = v_{yy}, \quad t > 0, \quad y_1(t) < y < y_2(t), \tag{43}$$

$$v(y,0) = F(\varphi(r)) = F(\varphi(r(y))), \quad y_1(0) < y < y_2(0), \tag{44}$$

$$v(y_1(t),t) = F(\varphi_1(t)), \quad t > 0, \tag{45}$$

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -\frac{v_y(y_1(t),t)}{F(\varphi_1(t))}, \quad t > 0, \tag{46}$$

$$v(y_2(t),t) = F(\varphi_2(t)), \quad t > 0, \tag{47}$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = -\frac{v_y(y_2(t),t)}{F(\varphi_2(t))}, \quad t > 0, \tag{48}$$

($r(y)$ – функция, обратная функции $y(r) = \int_{R_1}^{r} \frac{\rho^2 A(\rho)}{F(\varphi(\rho))} d\rho$).

Непосредственно проверяется, что рассмотренная здесь задача сводится к решению задачи со свободными границами (43) – (48) с использованием формул (31), (33), (34), (36) – (42).

4.2. Решения задач нестационарной теплопроводности для граничных условий второго рода

Будем искать решение уравнения (29) в области Ω_T, удовлетворяющее начальному условию (37) и граничным условиям второго рода

$$\chi(r,T)T_r = f_1(t), \quad r = R_1, \quad t > 0, \tag{49}$$

$$\chi(r,T)T_r = f_2(t), \quad r = R_2, \quad t > 0. \tag{50}$$

Так как справедливо равенство

$$\chi(r,T)T_r = \frac{F'(T)}{r^4 A(r)} T_r,$$

то в силу (49) и (50) формулы (40) и (41) примут соответственно вид

$$y_1(t) = -\int_0^t R_1^2 f_1(\tau)d\tau$$

и

$$y_2(t) = -R_2^2 \int_0^t f_2(\tau)d\tau + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2 A(\rho)d\rho}{F(\varphi(\rho))}.$$

Таким образом, функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ полностью определяются начальными и граничными условиями (37), (49), и мы приходим к следующей краевой задаче:

$$v_t = v_{yy}, \quad t > 0, \quad y_1(t) < y < y_2(t), \tag{51}$$

$$v(y,0) = F(\varphi(r(y))), \quad y_1(0) < y < y_2(0), \tag{52}$$

$$v_y = R_1^2 v, \quad y = y_1(t), \quad t > 0, \tag{53}$$

$$v_y = R_2^2 v, \quad y = y_2(t), \quad t > 0. \tag{54}$$

Отметим, что условия (53) и (54) соответствуют граничным условиям (49) и (50), так что решение рассмотренной здесь задачи ((29), (37), (49), (50)) сводится к решению краевой задачи (51) – (54).

4.3. Решения задач нестационарной теплопроводности для граничных условий третьего рода

Будем искать решение уравнения (29) в области Ω_T, удовлетворяющее начальному условию (37) и граничным условиям третьего рода

$$\chi(r,T)T_r = \alpha_1(T - f_1(t)), \quad r = R_1, \quad t > 0, \tag{55}$$

$$\chi(r,T)T_r = \alpha_2(T - f_2(t)), \quad r = R_2, \quad t > 0. \tag{56}$$

В данном случае задача (29), (37), (55), (56) сводится к решению задачи со свободными границами, имеющей вид

$$v_t = v_{yy}, \quad y_1(t) < y < y_2(t), \quad t > 0, \tag{57}$$

$$v(y,0) = F(\varphi(r(y))), \quad y_1(0) < y < y_2(0), \tag{58}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}\ln v, \quad y = y_i(t) \ (i = 1,2), \quad t > 0, \tag{59}$$

$$v_y = \alpha_i R_i^2 v(F^{-1}(v) - f_i), \quad y = y_i(t) \ (i = 1,2), \quad t > 0. \tag{60}$$

Отметим, что условия (60) соответствуют граничным условиям (55), (56). Можно показать также, что приведенные в настоящей работе преобразования позволяют получить точные решения в неограниченном пространстве с шаровой полостью.

Краевые задачи со свободными границами для уравнений параболического типа исследовались многими авторами [13 – 15 и др.]

Заключение

1. Решение нелинейных краевых задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями первого и третьего родов приведено к решению линейной краевой задачи с двумя неизвестными границами для уравнения теплопроводности.
2. Решение нелинейной краевой задачи нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго рода приведено к решению линейной краевой задачи для уравнения теплопроводности. При этом граничные условия (49) и (50) можно выбрать таким образом, чтобы искомое решение было получено в аналитической форме, например, при $f_i(t) = \mathrm{const}$.
3. Нелинейные краевые задачи с граничным условием второго рода на одной поверхности ($r = R_1$) и с граничным условием первого или третьего рода на другой поверхности ($r = R_2$) сводятся к решению классической задачи Стефана для линейного уравнения теплопроводности.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 08-01-97031-Р-Поволжье-а

Библиографический список

1. Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности. Обзор // Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт. 1970, №5. С. 109 – 184.
2. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.:Наука, 1975. 227с.
3. Свинолупов С.И. Эволюционные уравнения второго порядка // УМН. 1985. Т.40, В.5. С. 263 – 264.
4. Хабиров С.В. Проблема Беклунда для эволюционных уравнений второго порядка: Препринт. Уфа: Башкирск. филиал АН СССР, 1986. 35 с.

5. Sokolov V.V., Svinolupov S.J. On the generation of nonlinear integrable evolution equations from linear second order equation // Friedrich-Schiller Universitet, JENA preprint N/88/33. 12p.
6. Жибер А.В., Цирельман Н.М. Точное решение задачи стефановского типа для твердого водорода // Инж.-физ.ж. 1989. Т. 54, №1. С. 144 – 145.
7. Жибер А.В., Цирельман Н.М. Точные решения задачи динамики адсорбции-десорбции с нелинейной изотермой сорбции // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. №5. С. 107 – 112.
8. Пухначев В.В., Шмарев С.И. Исследование квазилинейных уравнений методом лагранжевых координат // Функциональные и численные методы математической физики. Киев: Наукова думка, 1988. С. 181 – 185.
9. Rosen G. Nonlinear heat conduction in solid H_2 // Phys. Rev. B.1979. V.19. №19. P. 2398 – 2399.
10. Rosen G. Method for the exact solution of a nonlinear diffusion-convection equation // Phys. Rev. Let. 1982. V.49, №25. P. 1844 – 1847.
11. Bluman G., Kumei S. On the remarkable nonlinear diffusion equation // J. of Math. Phys. 1980. V.21, №5. P. 1019 – 1023.
12. Мейерманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239с.
13. Рубинштейн Л.Н. Проблема Стефана. Рига: Звайзгне, 1967. 457с.
14. Фридман А. Уравнения с частичными производными параболического типа. М: Мир, 1968. 427с.
15. Жибер А.В. Дифференциальные подстановки в задачах со свободными границами //Асимптотические методы решений дифференциальных уравнений. Уфа: Ин-т математики с ВЦ УрО РАН, 1992. С. 27 – 45.