

УДК 551.322: 533

## К РАСЧЁТУ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ВОДЯНОГО ПАРА В СНЕЖНОМ ПОКРОВЕ

**Р.И.Гаврильев**

*Институт мерзлотоведения им. акад. П.И.Мельникова СО РАН,  
677010, Якутск-10, Мерзлотная, 36, Россия*

Предложена модельная схема расчёта эффективного коэффициента диффузии водяного пара в снеге с учётом его дисперсной структуры. Она является дальнейшим развитием предложенной нами модели [1] при более адекватном подходе к описанию процесса тепло- и массообмена в снеге. Основу модели составляет расчётная кубическая ячейка, содержащая внутри сферическую частицу с точечными контактами на вершинах. Распределение концентрации пара на поверхности частицы определяется её температурным полем. Расчёт последнего выполнен на основе теории обобщённой проводимости составных тел, в качестве которых в модели фигурируют лёд и паровоздушная смесь. Установлена количественная связь между коэффициентом диффузии водяного пара в снеге и его плотностью, удовлетворительно объясняющая большие разбросы экспериментальных данных исследователей. Показано, что вследствие дисперсной структуры снега коэффициент диффузии пара в нём может превышать коэффициент молекулярной диффузии пара в воздухе во много раз, вплоть до 6,5 раз для уплотнённого снега.

*Снег, пар, воздух, температура, концентрация пара и воздуха, поток пара, коэффициент диффузии.*

## ON CALCULATION OF THE COEFFICIENT OF WATER VAPOUR DIFFUSION IN SNOW COVER

**R.I. Gavriliev**

*Melnikov Permafrost Institute SB RAS, Merzlotnaya St. 36, Yakutsk 677010, Russia*

A model is proposed for calculating the effective diffusion coefficient of water vapour for snow with account for its particulate structure. This is an improvement of the model presented in [1], based on more adequate treatment of heat and mass transfer in snow. The model considers a cubic cell containing a spherical particle with point contacts on the apexes. The vapour concentration distribution on the particle surface is controlled by its temperature field. The temperature field is calculated based on generalized conduction theory for composite bodies, represented in the model by ice and vapour-air mixture. A quantitative relation between the diffusion coefficient of water vapour in snow and the snow density is established which provides a good explanation for the large scatter of experimental data. Because of the particulate structure of snow, the diffusion coefficient of vapour in snow is several times greater than the molecular diffusion coefficient of vapour in air (six times for compact snow).  
*Snow, vapour, air, temperature, vapour and air concentration, vapour flux, diffusion coefficient.*

### **Введение**

Обзор литературных работ [2-8] показывает, что экспериментальные данные исследователей существенно расходятся в величинах коэффициента диффузии водяного пара в снеге  $D_{сн}$ ; не однозначны и выводы авторов относительно наличия или

отсутствия зависимости этой характеристики от температуры, плотности и структуры снега. Так, измеренные в опытах осреднённые значения  $D_{сн}$  колеблются в пределах от 0,17 до 1,20 см<sup>2</sup>/с, хотя авторы пользовались одними и теми же стандартными методами: кристаллизатора или кювет. Некоторые авторы [9, 10] в теоретических расчётах тепло- и массопереноса в снеге исходили из коэффициента диффузии воздуха, равного 0,20 см<sup>2</sup>/с при 0°С, считая, что эти параметры для пара и воздуха примерно равны. Однако экспериментальный материал говорит об обратном: измеренная величина коэффициента диффузии пара в снеге во много раз (вплоть до 4-6 раз - у Ц.Иосиды и А.В.Павлова) превышает коэффициент молекулярной диффузии воздуха. Это явление Ц.Иосида и А.В.Павлов объясняют тем, что перенос водяного пара в снежном покрове осуществляется не только за счёт микроскопической диффузии по поровым пространствам (свободная диффузия в воздухе), но и как бы прохождением через сами снежинки путём конденсации на одной их стороне и испарения с другой (макроскопическая или кристаллизационная). Перенос пара в поровом пространстве снега осуществляется под действием градиента температуры, создающего перепад упругости пара в нём. Нам кажется, что столь большие различия в величинах коэффициента диффузии пара в снеге и молекулярной диффузии воздуха обусловлены дисперсной структурой снега, так как испарение пара на самом деле осуществляется со всей наружной поверхности частицы, а расчёт его потока под действием градиента температуры производится по площади основания частицы (модель кристаллизатора), которая заведомо меньше площади её испаряющей поверхности, т.е. как бы происходит искусственное увеличение потока пара.

В доказательство этого тезиса нами предложена модель расчёта коэффициента диффузии водяного пара в снеге [1].

### **Поправки к схеме расчёта потока диффузии пара в снеге**

Суть предложенной модели вкратце сводится к следующему. Поскольку охлаждение снега происходит сверху, то концентрация пара увеличивается сверху вниз. При этом потоки пара и тепла движутся в одну сторону – от почвы к поверхности снега (снизу вверх). Снег имеет сложную многоветвистую ажурную структуру с многочисленными контактами между частицами. Примерно такая же структура рассматривается в модели с изменяющейся формой частиц при расчёте коэффициента теплопроводности снега [11, 12]. Модель состоит из трёх взаимно пересекающихся эллипсоидов вращения в кубической ячейке и вполне адекватно отображает метаморфические изменения структуры снега в полном цикле превращения его с момента первых твёрдых осадков до состояния ледников. При этом, в зависимости от пористости снега, частицы принимают самую разнообразную форму: игольчато-крестовидную, изъеденную, сферическую, угловатую и выпукло-кубическую. При изучении процесса диффузии пара мы ограничиваемся одним из частных случаев этой модели, когда частицы имеют сферическую форму [1], притом рассматривается их кубическое расположение. В температурном поле снежного покрова пар испаряется с верхней поверхности нижележащей частицы и под действием градиента температуры направляется вверх к нижней поверхности вышележащей частицы и там, почти в том же количестве, конденсируется сообразно условию термодинамического равновесия. Поэтому для изучения переноса пара в пространстве между частицами достаточно рассматривать один из двух процессов: испарения или конденсации (в модели это соответствует схеме полусферы). Мы остановились на процессе испарения. Температурное распределение в снежном покрове формирует поле концентрации в нём и тем самым определяет интенсивность диффузионного переноса пара. Обратного переноса пара в снеге нет.

Итак, в предыдущей нашей работе [1] рассматривалась схема, показанная на рис.1 для полусферы в полукубической ячейке. Частица на вершинах имеет плоскость контакта с другими частицами. В основании ( $y = 0$ ) и на вершине шара ( $y = R$ ) поддерживаются постоянные температуры  $t_1$  и  $t_2$  ( $t_1 > t_2$ ), которые обуславливают также постоянные концентрации пара  $c_1$  и  $c_2$  ( $c_1 > c_2$ ). Поскольку испарение пара – явление поверхностное, то в направлении теплового потока по оси  $oy$  задаётся распределение концентрации пара по всей поверхности шара  $c(y)$  или  $c(x)$  в пределах от  $c_1$  до  $c_2$ .

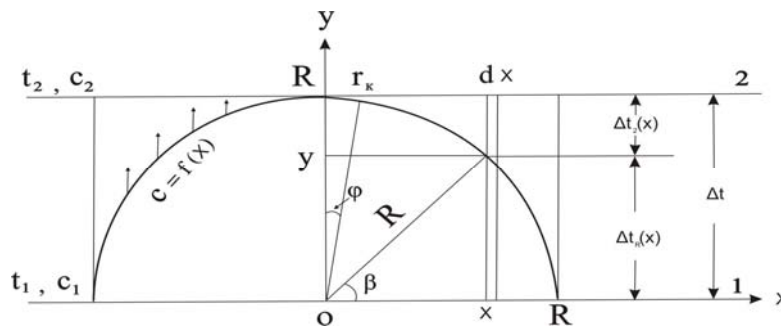


Рис.1. Схема модели расчёта испарения, диффузии пара и температуры снега [1].

Процесс возгонки снега является процессом диффузионным и описывается также уравнением Фика. Согласно принципам диффузионной теории испарения Д.Максвелла [10] общее уравнение для скорости испарения тела произвольной формы имеет вид:

$$\frac{dM}{dt} = - \int_S D_o \text{grad } c \overline{dS} \quad , \quad (1)$$

где  $\frac{dM}{dt}$  – диффузионный поток пара с поверхности тела;  $D_o$  – обобщённый коэффициент диффузии пара, зависящий от молекулярной диффузии и характера движения среды относительно тела;  $S$  – поверхность тела;  $\overline{dS}$  – вектор элемента поверхности тела;  $c$  – весовая концентрация пара в воздухе.

Строгая теория испарения твёрдых тел чрезвычайно сложна, поэтому обычно рассматривается только случай стационарного испарения:  $i = \frac{dM}{dt} = \text{const}$ . Из формулы

(1) следует, что количество пара в пространстве над полусферой зависит от площади поверхности испарения и распределения на ней градиента концентрации пара. Чем больше удельная поверхность тел, тем интенсивнее в них образование пара. Дисперсная структура тел способствует большему развитию процессов испарения влаги. Этим и можно объяснить наблюдавшуюся большую разницу в величинах коэффициента диффузии пара в снеге и в воздухе.

Применительно к схеме на рис.1 следует отметить, что в формуле (1) градиент концентрации берётся вне шара, т.е. в области  $R$ - $y$ , и рассматриваются наружная поверхность шара  $S$  и ее дифференциал  $dS$ . В предыдущей нашей работе [1] неточность допущена в выборе этих параметров: вместо  $R$ - $y$  взято  $y$ , а дифференциал  $dS$  рассчитан по площади основания шара, т.е. по существу рассчитан поток пара внутри шара.

Дифференциал наружной поверхности шара равен:  $dS = 2\pi x dl$  (здесь  $dl = \sqrt{dy^2 + dx^2}$  - длина дуги наружной поверхности сферы, отсечённая наклонным кольцом с радиусами  $x$  и  $x + dx$ ). Имея в виду, что  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ , для дифференциала  $dS$  получаем:

$$dS = \frac{2\pi R x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad (2)$$

С учётом высказанных замечаний применительно к схеме на рис.1. для потока пара  $i$  через цилиндрическую область модели напишем:

$$i = -D_m \int_{S_k}^S \frac{c(y) - c_2}{R - y} dS = -2\pi R D_m \int_{r_k}^R \frac{[c(x) - c_2] x dx}{(R - \sqrt{R^2 - x^2}) \sqrt{R^2 - x^2}} \quad (3)$$

где  $D_m$  - коэффициент молекулярной диффузии пара в поровом пространстве;  $r_k$  и  $S_k$  - радиус и площадь пятна контакта на вершине шара. В этой формуле градиент концентрации отсчитывается от  $c_2$ .

Распределение концентрации пара на поверхности частицы  $c(x)$  определяется её температурой. При её оценке в первом приближении нами [1] было использовано решение, полученное М.Г.Каганером [13] для шара с двумя площадками на вершинах (см. рис.1). В задаче предполагается, что передача тепла осуществляется только через контактные поверхности частиц, т.е. через среду в поровом пространстве тепло не пропускается. Однако такое допущение для снега оказывается не совсем корректным. Его можно принять только при очень низких температурах (порядка  $-20^\circ\text{C}$  и ниже), когда диффузионный перенос пара сравнительно мал и передача тепла в снеге осуществляется в основном молекулярной теплопроводностью воздуха (кондукция).

В общем случае при расчёте температурного распределения на поверхности снежной частицы следует учесть дополнительный конвективный перенос тепла посредством диффузии водяного пара под действием градиента температуры. Это можно осуществить, используя в расчётах эффективный коэффициент теплопроводности воздуха  $\lambda_2$ , включающий в себя тепловой эффект термодиффузионного переноса пара в снеге [12]

$$\lambda_2 = \lambda_{\text{вз}} + \frac{L_{\text{взг}} D_{\text{сн}} e_o}{R_n T^2} \left( \frac{L_{\text{взг}}}{R_n T} - 1 \right) \exp \left[ \frac{L_{\text{взг}} (T - T_o)}{R_n T_o T} \right] \quad (4)$$

где  $\lambda_{\text{вз}}$  - коэффициент теплопроводности спокойного воздуха (молекулярная теплопроводность);  $e_o = 6,1 \cdot 10^2 \text{ Па}$  - упругость насыщенного пара при  $0^\circ\text{C}$  ( $T_o = 273 \text{ К}$ );  $R_n = 4,6 \cdot 10^2 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$  - газовая постоянная водяного пара;  $T$  - абсолютная температура;  $L_{\text{взг}}$  - скрытая теплота возгонки льда;  $D_{\text{сн}}$  - коэффициент диффузии водяного пара в снеге.

Однако необходимо заметить, что в расчётах  $\lambda_2$  внутри модельного пространства в формуле (4) следует использовать коэффициент молекулярной диффузии пара  $D_m$ . Для температурной зависимости  $D_m$  при атмосферном давлении (1 атм.) имеется формула [14]

$$D_m = D_o \left( \frac{T}{273} \right)^{1,5} \quad (5)$$

где  $D_o$  - коэффициент диффузии пара при температуре  $0^\circ\text{C}$  ( $T_o = 273 \text{ К}$ ). По многочисленным литературным данным (см. работу [1]) значения  $D_o$  для паров

воды в воздухе изменяются в пределах от 0,205 до 0,277 см<sup>2</sup>/с, а чаще всего встречаются величины  $D_o$  в диапазоне от 0,230 до 0,277 см<sup>2</sup>/с. Имеются ещё и экспериментальные данные А.Юмикиса [15]:  $D_o = 0,426$  см<sup>2</sup>/с, полученные при схожих со схемой кристаллизатора условиях опыта, но явно выпадающие из общего ряда измеренных значений  $D_o$ . В расчётах примем среднюю величину  $D_o$  равной 0,25 см<sup>2</sup>/с.

Молекулярную теплопроводность воздуха в зависимости от температуры можно оценить по следующей формуле [16]:

$$\lambda_{\text{вз}} = \lambda_{\text{вз}}^o \left( \frac{T}{273} \right)^{0,82}, \quad (6)$$

где  $\lambda_{\text{вз}}^o = 0,0244$  Вт/(м·К) – коэффициент кондуктивной теплопроводности воздуха при температуре 0°C ( $T_o = 273$  К).

Рассчитанная с учётом формул (5) и (6) зависимость эффективного коэффициента теплопроводности воздуха от температуры показана на рис.2.

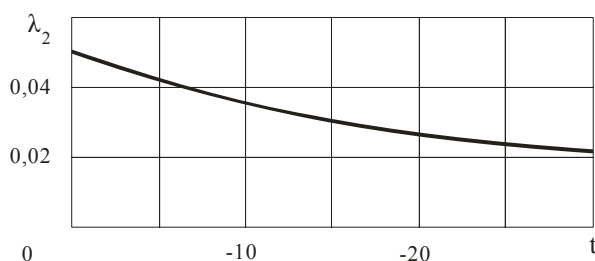


Рис.2. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности воздуха  $\lambda_2$  [Вт/(м·К)] в снежном покрове от температуры  $t$  (°C) [17].

Приближенную оценку распределения температуры по поверхности частицы снега можно осуществить на основе теории обобщённой проводимости составных тел. При этом искривления линии тока в компонентах системы обычно не учитываются, что, конечно, вносит некоторые погрешности в расчёты. Однако, эти погрешности в значительной степени устраняются дроблением элементарной расчётной ячейки адиабатическими и изотермическими плоскостями и использованием среднеарифметических значений коэффициента теплопроводности исследуемой системы при этих двух методах дробления расчётной ячейки [18].

Рассмотрим схему на рис.1 и предположим, что между сферическими частицами существуют только точечные контакты. На рис.1 выделим круговое кольцо шириной  $dx$  с внутренним радиусом  $x$ . В нём частица (1) и среда (2) пронизываются одинаковым тепловым потоком  $Q$ , равным

$$dQ = -\lambda_1 \frac{\Delta t_R}{y} dS = -\lambda_2 \frac{\Delta t_2}{R-y} dS, \quad (7)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности частицы изо льда и воздуха с водяным паром (эффективный коэффициент);  $dS$  – площадь сечения кругового кольца;  $\Delta t_R(x) = t_R(x) - t_1$  и  $\Delta t_2(x) = t_2 - t_R(x)$  – перепады температур на поверхности частицы и в воздушном пространстве кругового кольца;  $t_R(x)$  – температура поверхности шара в точках  $(x$  и  $y)$  пересечения её с цилиндрическим кольцом. Выражение (7) справедливо для любого радиуса  $x$ .

Учитывая соотношения:  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  и  $\Delta t_R(x) + \Delta t_2(x) = \Delta t$  (общий перепад температуры в расчётной ячейке  $t_2 - t_1$ ) для относительного перепада температуры на контуре частицы из формулы (7) получим

$$\frac{\Delta t_R(x)}{\Delta t} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - x^2/R^2}} - 1 \right)}. \quad (8)$$

Отсюда следует, что распределение температуры на поверхности частицы зависит от отношения теплопроводности частицы и поровой среды (рис.3). К снегу с учётом эффективного коэффициента теплопроводности воздушной среды подходят кривые 6-8 в пределах температуры от 0 до  $-10^\circ\text{C}$ .

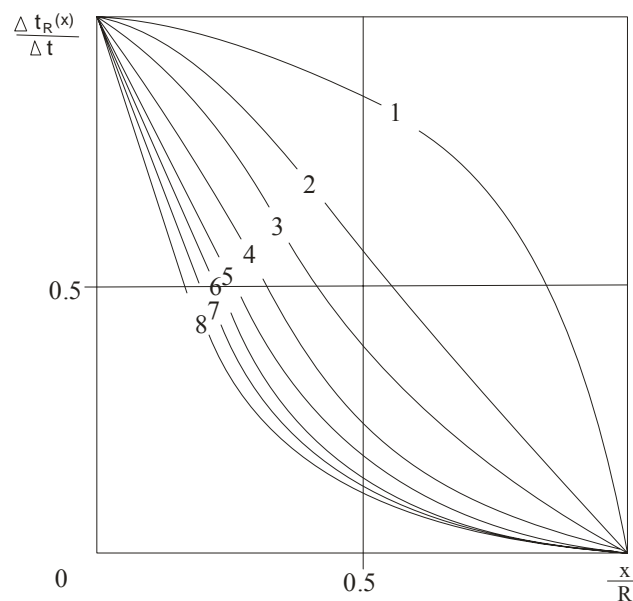


Рис.3. Распределение относительного перепада температуры по контуру сферической частицы модели при разных значениях соотношения  $\lambda_1/\lambda_2$ : 1 -1; 2 - 5; 3 - 10; 4 - 20; 5 - 30; 6 - 40; 7 - 50; 8 - 60.

Учитывая насыщенное состояние пара в снеге, его концентрацию оценивали по известной формуле:

$$c = \frac{c_o T_o}{T} \exp\left(\frac{22,46t}{T}\right), \quad (9)$$

где  $c_o = e_o \mu_l / R_n T_o$  – концентрация пара при температуре  $T_o$ ;  $\mu_l$  – молекулярный вес пара.

По результатам расчётов концентрации пара по формуле (9) при задании распределения температуры поверхности частицы по кривым 6-8 (рис.3) (в пределах температуры от 0 до  $-10^\circ\text{C}$ ) получается единая (с немногими отклонениями) кривая зависимости относительного перепада концентрации пара по контуру шара  $\Delta C_R(x)/\Delta C$  от безразмерной координаты  $x/R$  (рис.4). В целях удобства интегрирования в соотношении (3) эта кривая выражена формулой

$$\frac{\Delta C_R(x)}{\Delta C} = 2,4 \frac{x}{R} - 1,4 \frac{x^2}{R^2}, \quad (10)$$

где  $\Delta C = C_1 - C_2$  - максимальный перепад концентрации пара на экваториальной и вершинной плоскостях сферической частицы модели;  $\Delta C_R(x) = C_R(x) - C_2$  - перепад концентрации пара по контуру частицы относительно её вершинной плоскости.

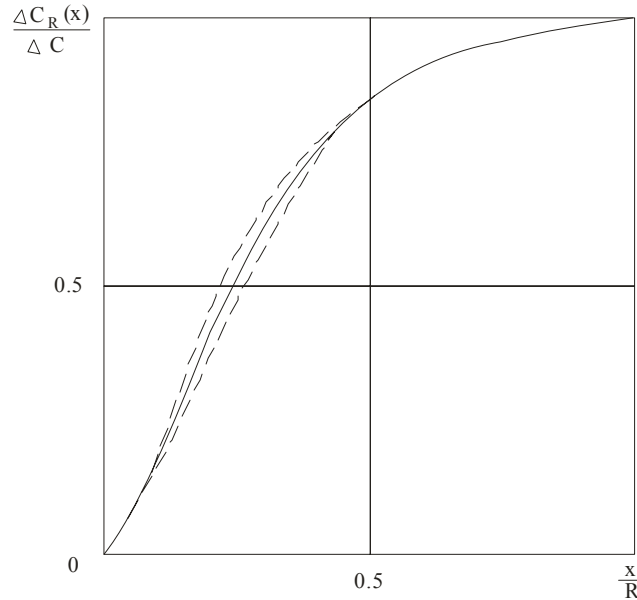


Рис.4. Распределение относительного перепада концентрации пара по поверхности сферической частицы снега.

Далее отметим, что поскольку между частицами существуют только точечные контакты ( $r_k = 0$ ), то в формуле (3) интегрирование по  $dx$  произведём в пределах от 0 до  $R$ . Тогда поток пара в цилиндрической области модели будет рассчитываться по следующей формуле:

$$\begin{aligned} i &= -2\pi R D_m (C_1 - C_2) \int_0^R \frac{\left(2,4 \frac{x}{R} - 1,4 \frac{x^2}{R^2}\right) x dx}{\sqrt{R^2 - x^2} (R - \sqrt{R^2 - x^2})} = \\ &= -2\pi R D_m (C_1 - C_2) (1,2\pi + 0,3). \end{aligned} \quad (11)$$

#### Расчёт коэффициента диффузии пара в снеге

Эффект влияния дисперсности структуры снега на коэффициент диффузии пара в нём, как и прежде, будем оценивать сравнением рассчитанного по формуле (11) потока пара  $i$  с потоком через поверхность основания цилиндрической области  $i_{пл} = -\pi R D'_{сн} (c_1 - c_2)$ , где  $D'_{сн}$  - эффективный коэффициент диффузии пара в цилиндрической области модели снега. Тогда получим, как и раньше:

$$D'_{сн} = K D_m, \quad (12)$$

где  $K = 2(1,2\pi + 0,3)$  - параметр дисперсности структуры снега, показывающий во сколько раз возрастает коэффициент диффузии пара в снеге, по сравнению с его молекулярной диффузией в воздухе, вследствие увеличения площади испарения снежных частиц.

При учёте участия сквозного пространства в диффузии пара общий коэффициент диффузии пара в снеге рассчитывается по следующей формуле [1]:

$$D_{сн} = D_{м} [1 + 1,5(K - 1)(1 - m)] , \quad (13)$$

где  $0,48 \leq m \leq 1$ .

Таким образом, коэффициент диффузии водяного пара в снеге зависит от его пористости (плотности).

Расчёты проведём в пределах увеличения плотности снега от 0,1 до 0,4 г/см<sup>3</sup> ( $m = 0,56 \div 0,89$ ). При этом получены следующие пределы значений коэффициента диффузии снега  $D_{сн}$  (см<sup>2</sup>/с): 0,55 ÷ 1,45. Согласно предложенной модели максимальная величина коэффициента диффузии пара в снеге может достигать 1,63 см<sup>2</sup>/с при пористости, равной 0,48, или при плотности около 0,48 г/см<sup>3</sup>.

### **Выводы**

Разработана модель для описания процесса диффузии водяного пара в снеге с учётом его дисперсной структуры. На её основе установлена количественная связь между коэффициентом диффузии пара в снежном покрове и его плотностью. Теоретически доказано, что вследствие дисперсной структуры снега коэффициент диффузии пара в нём может превышать коэффициент его молекулярной диффузии в воздухе во много раз, вплоть до 6,5 раз.

Работа выполнена при поддержке программы РФФИ 06-05-96126.

### **Литература**

- [1] Гаврильев Р.И. К коэффициенту диффузии водяного пара в снежном покрове // Криосфера Земли, 2004а, т. VIII, № 2, с. 74-81.
- [2] Yosida Z. Heat transfer by water vapor in snow cover. Teion Kagaki // Inst. of Low Temperat. Sci., 1950, No. 5, p. 93-100.
- [3] Павлов А.В. Теплофизические свойства и тепловой баланс снежного покрова в Подмосковье // Материалы к учению о мёрзлых зонах земной коры. М., Изд-во АН СССР, 1962. с. 3-35.
- [4] Куваева Г.М. К вопросу определения величины коэффициентов диффузии водяного пара в снегу // Материалы Третьей закавказской науч. конф. по изучению снежного покрова, снежных лавин и горных ледников Кавказа. Тр. Закавказ. науч.-исслед. гидрометеоролог. ин-та. Вып.20. Л., Гидрометеиздат, 1966, с. 75-79.
- [5] Морозов Г.А. Расчёт изменения плотности снежного покрова под действием диффузии, конвекции, возгонки и сублимации водяного пара в нём // Метеорология и гидрология, 1967, № 6, с. 98-104.
- [6] Савельев Б.А., Лаптев М.П., Лаптева Н.И. Строение, состав, физико-механические свойства снега в Хибинах и их изменения в процессе метаморфизма // Снег и лавины Хибин. М., Изд-во МГУ, 1967, с. 201-239.
- [7] Коломыйц Э.Г. Структура и режим снежной толщи Западно-Сибирской тайги. Л., Наука, 1971, 174 с.
- [8] Федосеева В.И., Федосеев Н.Ф. Оценка коэффициента диффузии водяного пара в снежном покрове // Метеорология и гидрология, 1988, № 2, с. 132-136.
- [9] Woodside W. Calculation of the thermal conductivity of porous media // Canadian Journal of Physics, 1958, vol. 37, No 7, p. 112-118.
- [10] Дюнин А.К. Испарение снега. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1961, 119 с.



- [11] Gavrilyev R.I. A mathematical model for calculating thermal conductivity of snow subject to metamorphism // Proc. of the 5<sup>th</sup> Intern. Symp. on Thermal Engin. and Sci. for Cold Regions. (May 19-22, 1996, Ottawa, Canada). Printing of Proc. Supported by National Research Council Canada, 1996, p. 516-521.
- [12] Гаврильев Р.И. Теплофизические свойства горных пород и напочвенных покровов криолитозоны. Новосибирск, Изд-во СО РАН, 1998, 280 с.
- [13] Каганер М.Г. Контактный теплообмен в вакуумированном зернистом материале // ИФЖ, 1966, т. II, № 1, с. 30-37.
- [14] Таблицы физических величин. Справочник. Под ред. акад. И.К. Кикоина. М., Атомиздат, 1976. 1008 с.
- [15] Jumikis A. Vapor Diffusion in Freezing Soil Systems of Very Large Porosities // Highway Research Board Bulletin, 1962, No 331, p. 28-45.
- [16] Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М., Физматгиз, 1963, 708 с.
- [17] Гаврильев Р.И. Теплофизические свойства компонентов природной среды в криолитозоне. Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2004б, 145 с.
- [18] Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л., Энергия, 1974, 263 с.