

Теория броуновского движения в жидкости Максвелла-Фойгта

Райхер Ю.Л., Русаков В.В.

Институт механики сплошных сред УрО РАН,

ул. Королева, 1, Пермь 614013, Россия

email: raikher@icmm.ru

Развита теория броуновского движения частицы в вязкоупругой среде, описываемой моделью Максвелла-Фойгта. Получена полная система стохастических уравнений и построено соответствующее кинетическое уравнение. Показано, что в безынерционном приближении, когда массой броуновской частицы можно пренебречь, в рассматриваемой модели с частицей связана эффективная масса и, как следствие, кинетическое уравнение имеет вид уравнения Крамерса. Стационарным решением этого уравнения является распределение Максвелла-Больцмана с кинетической энергией, определяемой эффективной массой частицы. В качестве примера выполнен расчет динамической магнитной восприимчивости плоского ротатора, моделирующего ориентационное движение наночастиц ферромагнетика в вязкоупругой среде. Показано, что, наряду с хорошо изученным дебаевским механизмом релаксации, в рассматриваемой модели возможен и т.н. «бесстолкновительный» режим (затухание Ландау).

Введение

В последние годы возник большой интерес к изучению броуновского движения частиц в жидкостях со сложной реологией. Этот «вездесущий» флуктуационный процесс чрезвычайно важен не только с фундаментальной, но и с практической точки зрения как способ изучения реологических свойств указанных сред на малых масштабах посредством микрзондов, роль которых выполняют специально внедренные частицы твердой примеси [1-3]. Такое *микрореологическое* исследование имеет существенные особенности по сравнению с традиционной макрореологией. Прежде всего, микрореологический эксперимент можно проводить даже в очень малом объеме изучаемой среды, например, измерять реологию внутреннего вещества (цитозоля) живых клеток [4,5]. Кроме того, малая инерционность частиц-зондов позволяет существенно расширить частотный диапазон измерений.

Для того, чтобы описать диффузионное движение частицы в сложной жидкости (матрице), необходимо задать реологическое уравнение состояния последней. В классической реологии общепринятым является эвристическое построение таких уравнений с помощью небольшого числа простых элементов — пружин и демпферов — соединенных по той или иной схеме. В настоящей работе предложен метод, позволяющий рассчитывать равновесные тепловые флуктуации в целом ряде реологических моделей, сконструированных по этому принципу. Насколько нам известно, пока в литературе имеется лишь один пример физически корректного и достаточно подробного описания броуновского движения, поступательного и вращательного в реологически сложной системе: решена задача о поведении осесимметричной твердой частицы в жидкости Максвелла с одним временем релаксации [6-8].

Высокая степень упрощения, использованная в модели [6-8], облегчает расчет, но одновременно существенно ограничивает возможности использования полученных результатов для интерпретации эксперимента. Укажем для примера на работы [4,5], где показано, что для описания внутренней реологии живой клетки необходима, как минимум, модель Максвелла-Фойгта, то есть комбинация трех, а не двух, как в

жидкости Максвелла, эвристических элементов. Поскольку «броуновской» теории движения частицы-зонда в тот момент не существовало, для интерпретации своих данных авторы использовали атермическую (фактически — макрореологическую) модель. Такая трактовка допустима, но лишь до тех пор, пока в качестве зондов берутся относительно крупные частицы (2–5 мкм), которые слабо подвержены броуновской диффузии. Для микрореологических тестов посредством частиц меньшего размера — таких как магнитные микросферы диаметром 0.5–0.7 мкм [9] — необходимость иметь уравнения, учитывающие тепловой шум в реологически сложной среде, становится принципиальной.

Адекватное теоретическое описание комбинации регулярного и диффузионного движения малых частиц в среде со сложной реологией принципиально важно и для разработки методов локальной и внутриклеточной гипертермии. В недавних экспериментах [10] установлено, что тепловыделение при низкочастотном магнитном облучении феррочастиц в жидкости достигает максимума именно в том случае, когда удастся возбудить связанные колебания внутренних (магнитных), и внешних (механических) степеней свободы вращательного движения. Для частиц маггемита и феррита кобальта [10], желательный диапазон размеров составляет 15–25 нм, что означает существенную «броуновость» частиц.

Броуновское движение в среде Максвелла-Фойгта

Для простоты изложения рассмотрим одномерное поступательное движение частицы массы m , которая находится в вязкоупругой среде Максвелла-Фойгта и испытывает действие регулярной силы $-\partial U(x)/\partial x$. Уравнение Ньютона имеет вид

$$m\ddot{x} = f - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (1)$$

где сила f моделирует взаимодействие (упругость и трение) между частицей и матрицей. Реологическая схема жидкости Максвелла-Фойгта приведена на рис. 1. Как видно, перемещение x частицы складывается из перемещения x_1 первого демпфера (вязкость η_1) и перемещения x_2 фрагмента, состоящего из пружины (модуль упругости G) и второго демпфера (вязкость η_2), так что $x = x_1 + x_2$. Сила сопротивления среды постоянна вдоль цепи: $f = f_1 = f_2$. Из определений реологических элементов рис. 1 следует, что

$$f_1 = -\zeta_1 \dot{x}_1, \quad f_2 = -Kx_2 - \zeta_2 \dot{x}_2,$$

где $\zeta_\alpha = 6\pi\eta_\alpha a$ — стоксовы коэффициенты трения ($\alpha = 1,2$), определенные для сферической частицы радиуса a , а коэффициент жесткости пружины $K \sim Ga$. Исключая промежуточные переменные x_1 и x_2 с помощью приведенных выше соотношений, находим связь между силой сопротивления среды и скоростью частицы

$$\left(1 + \tau_M \frac{d}{dt}\right) f = -\zeta_1 \left(1 + \tau_V \frac{d}{dt}\right) \dot{x}. \quad (2)$$

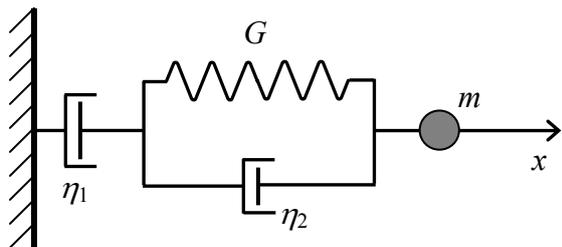


Рис. 1

Здесь $\tau_M = \zeta_1/K + \tau_V$ и $\tau_V = \zeta_2/K$ — характерные времена задачи. Динамические уравнения (1) и (2) являются базовыми для атермической теории (пренебрежение тепловым движением), использованной в работах [4,5].

Для учета броуновского движения в системе частица-матрица введем в уравнения (1) и (2) случайные силы, моделирующие тепловой шум. Для вывода кинетического уравнения полученную таким образом систему (стохастических) уравнений Ланжевена следует затем привести к стандартному виду

$$\dot{x}_i = A_i(\mathbf{x}) + y_i(t), \quad \langle y_i(t)y_j(t') \rangle = 2D_{ij}\delta(t-t'), \quad (3)$$

см., например, [11]. В уравнениях (3) x_i — компоненты вектора \mathbf{x} фазовых переменных системы, \mathbf{A} — вектор дрейфа и D_{ij} — матрица коэффициентов диффузии (интенсивностей шума). Подчеркнем, что аргументами дрейфовой функции в системе (3) являются только компоненты фазового вектора, но не скорости их изменения.

Как видно, уравнение (2) не имеет канонической формы (3). Преобразуем его, вводя вместо силы сопротивления f «естественную» переменную Q ; получаем

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{\tau_M}Q - \frac{\zeta_Q}{\tau_M}v, \quad Q = f + \zeta_V v, \quad \zeta_V \equiv \frac{\tau_V}{\tau_M}\zeta_1, \quad \zeta_Q \equiv \zeta_1 - \zeta_V. \quad (4)$$

В результате, система уравнений Ланжевена нашей модели принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau_p}v + \frac{1}{m}\left(Q - \frac{\partial U}{\partial x}\right) + y_v(t), \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{\tau_M}Q - \frac{\zeta_Q}{\tau_M}v + y_Q(t), \\ \langle y_v(t)y_v(t') \rangle = 2D_v\delta(t-t'), \quad \langle y_Q(t)y_Q(t') \rangle = 2D_Q\delta(t-t'). \end{aligned} \quad (5)$$

здесь $\tau_p = m / \zeta_V$ — инерционное время, определяющее темп релаксации скорости, а D_v и D_Q — интенсивности случайных сил. При переходе к пределу $\tau_V = 0$ (то есть $\eta_2 = 0$) рассматриваемая модель превращается в хорошо изученную ранее модель Максвелла [6,7]. В этом предельном случае первое слагаемое правой части уравнения для \dot{v} из системы (5) обращается в нуль ($1/\tau_p \sim \tau_V = 0$), так что $D_v = 0$ в полном соответствии с флуктуационно-диссипационной теоремой.

Для нахождения интенсивностей случайных сил воспользуемся следующим приемом. Как известно, см., например, [11,12], каждой системе уравнений Ланжевена соответствует кинетическое уравнение для функции распределения $W(\mathbf{x}, t)$, называемое уравнением Фоккера-Планка (УФП). В нашей задаче его равновесным решением является распределение Максвелла-Больцмана

$$W_{MB} \propto \exp\left\{-\frac{1}{T}\left[\frac{mv^2}{2} + U(x)\right]\right\}, \quad (6)$$

где T — температура в энергетических единицах. Действительно, равновесное состояние частицы в резервуаре определяется только ее энергией и не зависит от конкретных механизмов релаксации. Естественно предположить, что зависимость равновесного распределения от дополнительной переменной Q также имеет гауссов вид. Тогда стационарное решение искомого кинетического уравнения имеет вид

$$W_0(x, v, Q) \propto \exp\left\{-\frac{1}{T}\left[\frac{mv^2}{2} + U(x) + \frac{\alpha Q^2}{2}\right]\right\}; \quad (7)$$

где параметр псевдопотенциала α пока остается не определенным.

Опуская полный вывод УФП, напомним, что оно имеет вид уравнения непрерывности для функции $W(x, t)$, где учитываются и дрейфовые, и диффузионные

потоки. Применяя к системе (5) известную процедуру (см., например, [9,11]) находим УФП в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W(x, v, Q, t) + \left[v \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial W}{\partial v} \right] + \left(\frac{Q}{m} \frac{\partial W}{\partial v} - \frac{\zeta_Q}{\tau_M} v \frac{\partial W}{\partial Q} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v}{\tau_p} + D_v \frac{\partial}{\partial v} \right) W + \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{Q}{\tau_M} + D_Q \frac{\partial}{\partial Q} \right) W. \end{aligned} \quad (8)$$

При подстановке равновесного решения (7) первая скобка в левой части (8) обращается в нуль тождественно. Условие равенство нулю второй скобки в левой части определяет параметр псевдопотенциала:

$$\alpha = \frac{\tau_M}{\zeta_Q} = \frac{\tau_M^2}{\zeta_1(\tau_M - \tau_V)}. \quad (9)$$

Интенсивности шумов находятся из требования потенциальности потока вероятности [12]; в нашем случае это приводит к уравнениям

$$\left(\frac{v}{\tau_p} + D_v \frac{\partial}{\partial v} \right) W_0 = 0, \quad \left(\frac{Q}{\tau_M} + D_Q \frac{\partial}{\partial Q} \right) W_0 = 0,$$

откуда находим

$$D_v = \frac{T}{m\tau_p} = \frac{\zeta_1 \tau_V T}{m^2 \tau_M}, \quad D_Q = \frac{T}{\alpha \tau_M} = \frac{\zeta_1 (\tau_M - \tau_V) T}{\tau_M^3}. \quad (10)$$

Формулы (10) замыкают систему соотношений, описывающих броуновское движение частицы в среде Максвелла-Фойгта. Редукция к известным УФП и к системе уравнений Ланжевена [6-8] для частицы в жидкости Максвелла с одним временем релаксации выполняется элементарно. Для этого достаточно положить в (10) $\tau_V = 0$, что сразу дает $D_v = 0$.

Безынерционное приближение

Задача о броуновском движении существенно упрощается в т.н. безынерционном приближении, то есть в пределе $m \rightarrow 0$. Иными словами, рассматриваемые процессы предполагаются достаточно медленными: $\omega \tau_p \ll 1$. Для частиц коллоидного размера возникающее ограничение частотного диапазона является достаточно слабым.

Получим безынерционное описание для броуновской частицы в среде Максвелла-Фойгта. Подействуем на уравнение для \dot{v} из (5) оператором $1 + \tau_M d/dt$, определяющим временную эволюцию силы трения Q . В результате получаем стохастическое уравнение вида

$$\begin{aligned} m \left(1 + \tau_M \frac{d}{dt} \right) \frac{dv}{dt} + \zeta_1 \tau_V \frac{dv}{dt} + \left(\zeta_1 + \tau_M \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) v = - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \tilde{y}(t), \\ \tilde{U} \equiv \left(1 + \tau_M \dot{F} \frac{\partial}{\partial F} \right) U(x, F), \end{aligned} \quad (11)$$

где \tilde{U} — перенормированный потенциал взаимодействия частицы с внешним полем F . Как следует из (11), в нашем случае переход к пределу $m \rightarrow 0$, то есть пренебрежение первым слагаемым в левой части, означает ограничение

$$\tau_p \square \min(\tau_V, t_c \tau_V / \tau_M) \quad (12)$$

на характерные времена задачи, где t_c — время измерения. Считая условие (12) выполненным, положим в (11) $m = 0$ и представим сокращенное стохастическое уравнение в виде

$$\tilde{m} \frac{dv}{dt} + \tilde{\zeta} v = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \tilde{y}(t), \quad \tilde{m} \equiv \zeta_V \tau_M = \zeta_1 \tau_V, \quad \tilde{\zeta} \equiv \zeta_1 + \tau_M \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (13)$$

где \tilde{m} и $\tilde{\zeta}$ — эффективные значения массы частицы и коэффициента трения, $\tilde{y}(t)$ — белый шум, интенсивность которого подлежит определению. Придадим уравнению Ланжевена (13) каноническую форму (3):

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\tilde{\gamma} v - \frac{1}{\tilde{m}} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{1}{\tilde{m}} \tilde{y}(t), \quad \tilde{\gamma} \equiv \frac{\tilde{\zeta}}{\tilde{m}}, \quad (14)$$

$$\langle \tilde{y}(t) \tilde{y}(t') \rangle = 2D \delta(t - t').$$

Отсюда, пользуясь стандартной методикой, получим УФП:

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, v, t) + \left[v \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{1}{\tilde{m}} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right) \frac{\partial W}{\partial v} \right] = \frac{\partial}{\partial v} \left(\tilde{\gamma} v + \frac{D}{\tilde{m}^2} \frac{\partial}{\partial v} \right) W. \quad (15)$$

В стационарном внешнем поле равновесным решением этого уравнения должно быть распределение Максвелла-Больцмана (6) с очевидной заменой $m \Rightarrow \tilde{m}$; прямая подстановка показывает, что это действительно так, если

$$D = \tilde{m} \tilde{\gamma} T = \tilde{\zeta} T. \quad (16)$$

Соотношение (16) замыкает описание безынерционного приближения задачи о броуновском движении частицы в среде Максвелла-Фойгта. Как и ее более простые аналоги, эта задача может быть записана любым из двух эквивалентных способов: или в виде уравнений Ланжевена (14), или в виде уравнения Фоккера-Планка (15). Равновесное решение уравнения (15)

$$W \propto \exp \left\{ -\frac{1}{T} \left[\frac{\tilde{m} v^2}{2} + U(x) \right] \right\} \quad (17)$$

содержит псевдопотенциал, пропорциональный \tilde{m} и являющийся буквальным аналогом кинетической энергии частицы. Тем самым, обнаруживается замечательная особенность броуновского движения в среде Максвелла-Фойгта: частица с нулевой собственной массой (то есть, просто точка приложения сил) с необходимостью «присоединяет» к себе массу

$$\tilde{m} = \zeta_1 \zeta_2 / K, \quad (18)$$

величина которой целиком определяется свойствами вязкоупругой матрицы. При этом кинетическое уравнение (15) совпадает с уравнением Крамерса [12] и описывает броуновское движение частицы массы \tilde{m} в обычной жидкости, вязкость которой соответствует коэффициенту сопротивления частицы $\tilde{\zeta}$.

Динамическая восприимчивость

Используем построенную модель для расчета динамической восприимчивости суспензии магнитных частиц в среде Максвелла-Фойгта. Как и в работе [7], где изучалась жидкость Максвелла, аналитически удастся рассмотреть только случай плоского ротатора, когда магнитный момент μ «вморожен» в тело частицы и всегда лежит в одной плоскости с приложенным полем \mathbf{H} . В этом случае ориентационное состояние частицы характеризуется единственной переменной — углом \mathcal{G} между μ и \mathbf{H} . Все полученные выше соотношения остаются в силе при очевидной замене $x \rightarrow \mathcal{G}$ и $m \rightarrow I$, где I — момент инерции частицы.

Согласно теории линейного отклика [7,13] динамическая восприимчивость системы определяется дипольной корреляционной функцией $G(t)$:

$$\chi(\omega) = \chi(0) \left[1 + i\omega \int_0^\infty dt e^{i\omega t} G(t) \right], \quad G(t) = \langle \cos \mathcal{G}(t) \cos \mathcal{G}(0) \rangle_0 / \langle \cos^2 \mathcal{G} \rangle_0, \quad (19)$$

где $\chi(0) = n\mu^2 \langle \cos^2 \mathcal{G} \rangle_0 / T = n\mu^2 / 2T$ — статическая восприимчивость. В формулах (19) индекс 0 означает статистическое усреднение по равновесному состоянию системы при $\mathbf{H} = 0$.

Найдем корреляционную функцию в безынерционном приближении, то есть при условии

$$\omega \ll \min \left(\frac{1}{\tau_I}, \frac{1}{\sqrt{\tau_M \tau_I}} \right),$$

где инерционное время можно оценить соотношением $\tau_I = I/\zeta$. Используем уравнение (13) при $U = 0$. В наших обозначениях оно имеет вид

$$\Omega = \frac{d\mathcal{G}}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \Omega + \frac{1}{\tau_V} \Omega = \xi(t), \quad \langle \xi(t) \xi(0) \rangle = 2D_\Omega \delta(t). \quad (20)$$

Интегрируя это уравнение, находим коррелятор угловых скоростей, а через него выражаем среднеквадратичную флуктуацию угла

$$\langle \Delta \mathcal{G}^2 \rangle_0 \equiv \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle \Omega(t') \Omega(t'') \rangle_0 = \frac{2}{\tau_D} \left[t - \tau_V (1 - e^{-t/\tau_V}) \right]; \quad (21)$$

здесь $\tau_D = \zeta/T$ — время ориентационной (дебаевской) диффузии.

В силу линейности стохастического уравнения (20) угловая скорость, а с ней и угловое отклонение \mathcal{G} , являются гауссовыми случайными процессами, что позволяет выполнить усреднение в дипольной функции (19) и привести ее к виду

$$G(t) = \exp \left(- \langle \Delta \mathcal{G}^2 \rangle_0 / 2 \right). \quad (22)$$

Таким образом, динамическая восприимчивость выражается интегралом

$$\alpha(\omega) \equiv \chi(\omega) / \chi(0) = 1 + i\omega \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \exp \left\{ - \frac{1}{\tau_D} \left[t - \tau_V (1 - e^{-t/\tau_V}) \right] \right\}. \quad (23)$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд по параметру $q = \tau_V/\tau_D$, после чего интегрирование выполняется элементарно:

$$\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) - i\alpha''(\omega) = 1 + i\omega\tau_D e^q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-q)^k}{k!(1+k/q - i\omega\tau_D)}. \quad (24)$$

Результаты расчета по этой формуле представлены на рис.2а, где видно, что уже при $q \geq 0.1$ характер частотной зависимости восприимчивости заметно отличается от стандартной дебаевской, получающейся из (24) в пределе $q = 0$:

$$\alpha_D = 1/(1 - i\omega\tau_D). \quad (25)$$

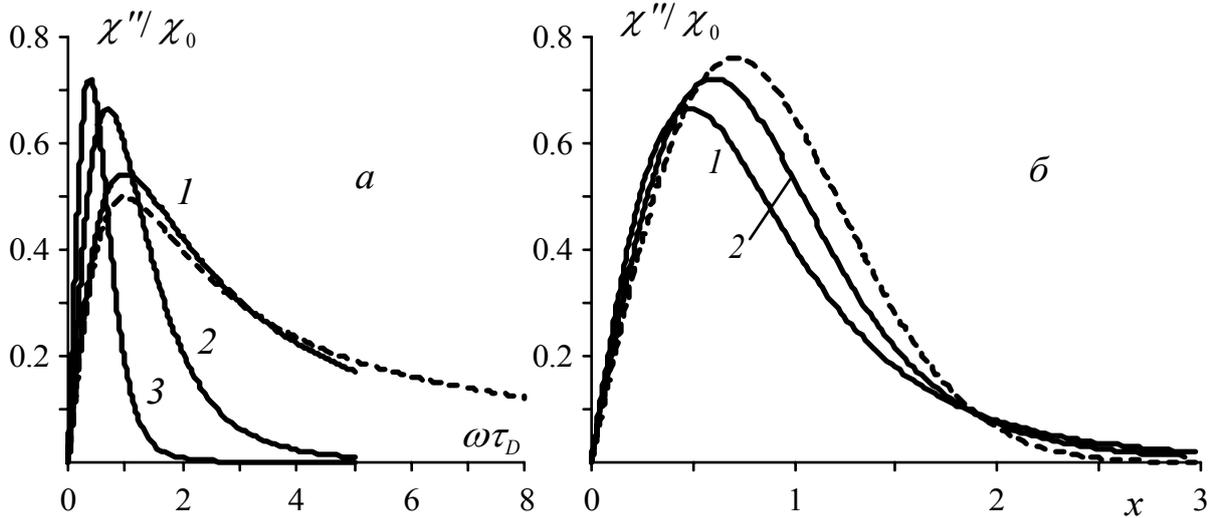


Рис.2. Мнимая часть динамической восприимчивости: (а) при $q = 0$ (штриховая), 0.1 (1), 1 (2) и 5 (3); (б) при $q = 1$ (1), 5 (2) и ∞ (штриховая).

По мере роста параметра q пик мнимой части восприимчивости возрастает, сужается и смещается в низкочастотную область. Еще заметнее изменения действительной части. Вместо монотонного снижения до нуля, как это происходит при дебаевской релаксации, линии $\alpha'(\omega)$ заходят в отрицательную область, где при $\omega \sim \sqrt{\tau_V \tau_D}$ достигают минимального значения и далее стремятся к нулю снизу. Предельный случай $q = \tau_V / \tau_D \ll 1$ специфичен именно для среды Максвелла-Фойгта. В этих условиях в интеграл (23) главный вклад вносит область $t \sim \tau_D \ll \tau_V$. Раскладывая флуктуацию фазы в ряд по t , приходим к соотношению

$$\langle \Delta \mathcal{G}^2 \rangle_0 \ll \langle \Omega^2 \rangle_0 t^2 \ll 1. \quad (26)$$

В баллистическом режиме (26) каждая частица вращается свободно, не испытывая трения: $\Delta \mathcal{G} \propto t$, но при этом распределение угловых скоростей в ансамбле является равновесным. При заданной частоте зондирующего поля резонансно взаимодействуют с ним только те частицы, угловые скорости которых близки к ω . Частицы, имеющие скорость немного меньшую ω ускоряются, поглощая энергию поля, и наоборот, частицы с большей угловой скоростью замедляются, отдавая свою энергию полю. В равновесной системе распределение частиц по скоростям — монотонно убывающая функция, и поэтому результирующим эффектом является поглощение энергии зондирующего поля. Такой механизм «бесстолкновительной» диссипации известен как затухание Ландау и хорошо изучен в физике плазмы [14]. Подставляя (26) в (23), находим восприимчивость в пределе Ландау ($q \rightarrow \infty$):

$$\alpha_L(\omega) \approx 1 - 2xe^{-x^2} \int_0^x du e^{u^2} + i\sqrt{\pi}xe^{-x^2}, \quad x = \omega\sqrt{\tau_V\tau_D}/2. \quad (28)$$

На рис.2б штриховой линией показана мнимая компонента восприимчивости в бесстолкновительном режиме вместе с линиями, соответствующими конечным значениям q .

Оценим характерные параметры рассматриваемой модели для возможной экспериментальной ситуации. В работе [5] методом магнитной реологии при помощи частиц-зондов размером $a \sim 1$ мкм изучались свойства внутриклеточного вещества амёб. Интерпретация результатов по модели Максвелла-Фойгта дала следующие оценки: $\tau_V \sim 10^{-2}$ с и $\eta_1 \sim 1$ Пз. Большинство бактерий имеют значительно меньший размер, чем амёбы, так что масштаб частицы-зонда должен быть на порядок меньше. Размер $a \sim 0.1$ мкм слишком мал, чтобы следить за вращением частиц в оптический микроскоп, как было сделано в [5]. При такой степени дисперсности адекватным методом регистрации может стать измерение динамической магнитной восприимчивости. Предположим, за неимением точных данных, что реологические параметры внутриклеточной среды остаются теми же. Тогда для времени дебаевской релаксации находим $\tau_D \sim \eta_1 a^3 / T \sim 10^{-1}$ с, что при указанном выше значении τ_V дает $q \sim 0.1$. Как видно из графиков рис.1, уже при такой невысокой вязкоупругости вещественная часть динамической магнитной восприимчивости качественно отличается от своего дебаевского аналога.

В заключение отметим, что метод, изложенный в настоящей работе, может применяться к изучению броуновского движения и в других, более сложных системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по грантам 06-01-00723 и 08-02-00802.

- [1] Mason T.G., Ganesan K., van Zanten J.H. Wirtz D., Kuo S.C. Particle tracking microrheology of complex fluids. *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol.79. P.3282–3285.
- [2] Cheng Z., Mason T.G. Rotational diffusion microrheology. *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol.90. Art.no.018304-4.
- [3] Cheng Z., Mason T.G., Chaikin P.M. Periodic oscillation of a colloidal disk near a wall in an optical trap. *Phys. Rev. E.* 2003. Vol.68. Art.no.051404-5.
- [4] Wilhelm C. Browaeys J., Ponton A., Bacri J.-C. Rotational magnetic particles microrheology: The Maxwellian case. *Phys. Rev. E* 2003. Vol.6. Art.no. 011504-10.
- [5] Wilhelm C., Gazeau F., Bacri J.-C. Rotational magnetic endosome microrheology: Viscoelastic architecture inside living cells *Phys. Rev. E* 2003. Vol.6. Art.no. 061908-12.
- [6] Волков В.С. Теория броуновского движения в вязкоупругой жидкости Максвелла. *ЖЭТФ.* 1990. Т.98. С.168–177.
- [7] Райхер Ю.Л., Русаков В.В. Динамическая восприимчивость вязкоупругих магнитных жидкостей. *ЖЭТФ.* 1996. Т.110. С.1797–1811.
- [8] Déjardin J.L. Viscoelastic effects on the dynamic susceptibility of a Brownian particle in an external potential. *Phys. Rev. E.* 1998. V.58. P.2808–2817.
- [9] Schlachter A., Gruner M.E., Spasova M., Farle M., Entel P. Preparation and properties of nanostructured magnetic hollow microspheres: experiment and simulation. *Phase Transitions.* 2005. Vol.78. P.741–750.
- [10] Fortin J.P., Wilhelm C., Servais J., Ménager C., Bacri J.C., Gazeau F. Size-sorted anionic iron oxide nanomagnets as colloidal mediators for magnetic hyperthermia. *J. Amer. Chem. Soc.* 2007. Vol.129. P.2628–2635.
- [11] Климонтович Ю.Л. (1995) Статистическая теория открытых систем. Янус, Москва.

- [12] Гардинер К.В. (1986) Стохастические методы в естественных науках. Мир, Москва.
- [13] Haken H. (1984) The Fokker-Planck equation. Springer, Berlin.
- [14] Климонтович Ю.Л. (1982) Статистическая физика. Наука, Москва.