

## ТЕПЛООБМЕН ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА В СКВАЖИНЕ

А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. С. Родионов

*Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. Зайнаб Бишшевой,  
Стерлитамак, Россия*

Температурные измерения вдоль ствола скважины широко используются в нефтепромысловом деле, геофизике, гидрогеологии и разведке для решения различных научных и геолого-промысловых задач. Только при одном успешном применении для выявления интервалов заколонного движения воды нефтегазовых скважинах промыслово-геофизического комплекса, основным методом в котором является термометрия, создается экономический эффект порядка стоимости строительства новой скважины [1].

Трудности теоретического исследования температурных полей турбулентного потока связаны со сложной зависимостью коэффициента турбулентной теплопроводности и поля скорости от пространственных координат, что приводит к необходимости решения задач сопряжения, содержащих уравнения конвективной теплопроводности с переменными коэффициентами, поиск решения которых представляет существенные трудности [3 – 5].

Рис. 1, а иллюстрирует профили скоростей для ламинарного [2] и турбулентного [1] режимов течения. На рис. 2, б представлена радиальная зависимость коэффициента теплопроводности для различных режимов течения.

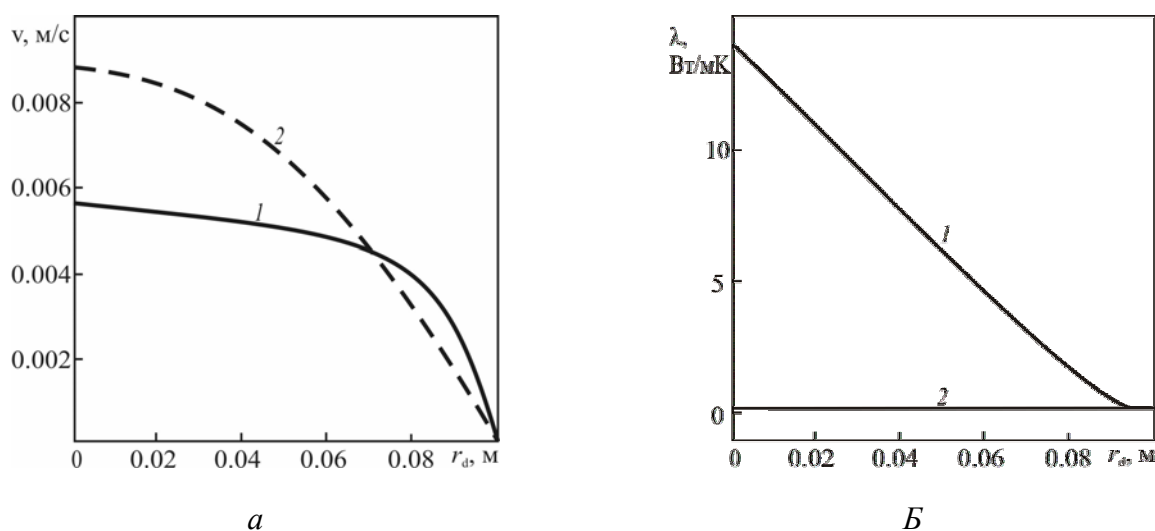


Рис. 1. Сопоставление профилей скорости (а) и теплопроводности (б) для турбулентного (1) и ламинарного (2) режимов течения

При турбулентном режиме течения коэффициент теплопроводности зависит от радиальной координаты и в центре скважины в десятки раз выше, чем на стенке. Таким образом, при турбулентном режиме течения учет зависимостей теплопроводности и скорости течения от радиальной координаты является необходимым.

На рис. 2 представлена геометрия задачи о температурном поле флюида, текущего в скважине радиуса  $r_0$ . Ось  $z_d$  цилиндрической системы координат направлена вдоль оси скважины. Предполагается, что массив среды однородный и ортотропный. Ортотропная среда, окружающая скважину, характеризуется теплопроводностями  $\lambda_{r-1}$  и  $\lambda_{z-1}$  в соответствии с направлениями осей. Поле скоростей жидкости в скважине имеет одну ненулевую составляющую, направленную вдоль оси  $z_d$  и задано вектором  $\vec{v} = (0, 0, v)$ . Вследствие своего движения жидкость также приобретает фиктивные ортотропные свойства, связанные с

проявлением турбулентности ( $\lambda_r$  и  $\lambda_z$  – соответствующие осям компоненты тензора теплопроводности жидкости с учетом турбулентной составляющей  $\lambda(r)$ ). Обозначим  $\theta_1$  – температурное поле массива,  $\theta$  – жидкости в трубе соответственно. Температура  $\theta_1$  отдаленных от скважины пород зависит от координаты  $z_d$  линейно; исследуются глубины, не подверженные сезонным колебаниям температуры на поверхности. Пусть коэффициент теплопроводности  $\lambda_r$  и скорость жидкости в трубе зависят только от расстояния до оси скважины:  $\lambda_r = \lambda(r)$ ,  $v(r) = v_0 R(r)$ . Профиль скорости и турбулентной теплопроводности рассчитываются с использованием уравнений Сполдинга [1]. На искомое решение накладывается также условие симметрии, заключающееся в том, что производная по радиальной координате на оси  $z_d$  цилиндрической системы координат, направленной вверх, в центре скважины обращается в нуль.

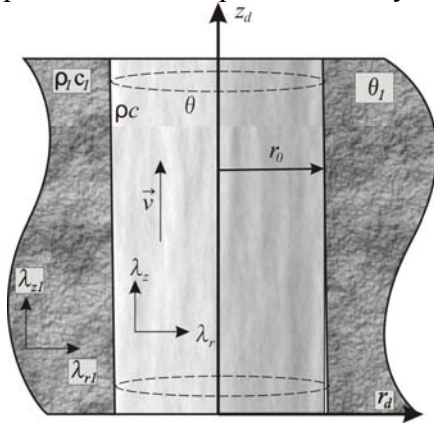


Рис. 2. Геометрия задачи

Постановка задачи в предположении осевой симметрии включает уравнение теплопроводности в окружающем трубу массиве

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \lambda_{r1} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left( r_d \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d} \right) - \lambda_{z1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_d^2} = 0, \quad r_d > r_0, \quad t > 0, \quad z_d > 0, \quad (1)$$

уравнение конвективной теплопроводности флюида с источниками в трубе запишем в предположении, что скорость жидкости зависит от расстояния до оси скважины  $v = vR(r_d)$ .

$$c_p \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left( r_d \lambda(r_d) \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \right) - \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^2} + c_p v R(r) \frac{\partial \theta}{\partial z_d} = q_d, \quad r_d < r_0, \quad t > 0, \quad z_d > 0, \quad (2)$$

где  $q_d = -\eta c \rho^2 \vec{g} \vec{v} R(r) + q_{sd}$ .

На границе труб и окружающего массива заданы условия равенства температур

$$\theta|_{r_d=r_0} = \theta_1|_{r_d=r_0} \quad (3)$$

и тепловых потоков

$$\lambda_r \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0} = \lambda_{r1} \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d} \Big|_{r_d=r_0}, \quad (4)$$

Начальные условия соответствуют естественной невозмущенной температуре Земли, возрастающей по линейному закону с глубиной  $z_d$

$$\theta|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad \theta_1|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \quad (5)$$

которая совпадает с температурой в удаленных от трубы точках окружающего массива

$$\theta_1|_{r_d \rightarrow \infty} = \theta_{01} - \Gamma z_d. \quad (6)$$

В точке  $z_d=0$  температура потока изменяется по заданному закону, определяемому величиной адиабатического эффекта

$$\theta|_{z_d=0} = \theta_{10}(\tau). \quad (7)$$

С помощью соотношений

$$r = r_d/r_0, \quad z = z_d/D, \quad \text{Fo} = a_{r1}t/r_0^2, \quad T_j = (\theta_j - \theta_{01} + \Gamma z_d)/\theta_{11}, \quad \Lambda = \lambda_{r1}/\lambda_r, \\ \text{Pe} = vr_0/a_{r1}, \quad \theta_{11} = \Gamma D, \quad \chi = c_1\rho_1/c\rho, \quad v = r_0/D, \quad \text{H} = \eta\rho gr_0/v\theta_{11},$$

где  $j = 1$  – номер области, задача (1) – (7) записана в безразмерных переменных и введен формальный параметр  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(r) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + R(r) \text{Pev} \left( \frac{\partial T}{\partial z} - 1 + \text{H} \right) = 0, \quad r < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \\ T|_{r=1} = T_1|_{r=1}, \\ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \\ T|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad T_1|_{\text{Fo}=0} = 0, \\ T_1|_{r \rightarrow \infty} = 0, \\ T|_{z=0} = T_0(\text{Fo}).$$

Решение задачи представлено в виде асимптотической формулы по формальному параметру  $\varepsilon$

$$T_j = T_j^{(0)} + \varepsilon T_j^{(1)} + \varepsilon^2 T_j^{(2)} + \dots + \varepsilon^n T_j^{(n)} + \Theta_j^{(n)},$$

где нижние индексы у безразмерной температуры  $T$  относятся к номеру области, а верхние соответствуют порядковому номеру приближения.

Таким образом, запишем постановку задачи в нулевом приближении

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \\ \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(r) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + R(r) \text{Pev} \left( \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1 + \text{H} \right), \quad r < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \\ T^{(0)} = T_1^{(0)} \Big|_{r=1},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=1} &= \Lambda \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1}, \\ T^{(0)}\Big|_{\text{Fo}=0} &= 0, \quad T_1^{(0)}\Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \\ T_1^{(0)}\Big|_{r \rightarrow \infty} &= 0, \\ T^{(0)}\Big|_{z=0} &= T_0(\text{Fo}).\end{aligned}$$

Нулевое приближение описывает среднюю температуру по сечению трубы. Постановка задачи для первого коэффициента разложения имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right) &= 0, \quad r > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \\ \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + R(r) \text{Pev} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} &= \frac{\chi}{\Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(r) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \right), \quad r < 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \\ T^{(1)}\Big|_{r=1} &= T_1^{(1)}\Big|_{r=1}, \\ \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r}\Big|_{r=1} &= \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=1}, \\ T_1^{(1)}\Big|_{\text{Fo}=0} &= 0, \\ T_1^{(1)}\Big|_{r \rightarrow \infty} &= 0.\end{aligned}$$

При решении задачи для первого приближения удовлетворить условиям  $T^{(1)}\Big|_{\text{Fo}=0} = 0$  и  $T^{(1)}\Big|_{z=0} = 0$  при любых  $r$  без погранслойных решений не представляется возможным. Это приводит к необходимости видоизменения соответствующих условий в момент времени  $\text{Fo} = 0$  и в точке  $z = 0$  и решения задачи для остаточного члена.

Обозначим сумму слагаемых после первого коэффициента разложения за остаточный член  $\Theta$ , тогда решение задачи (2.1) – (2.7) строится в виде асимптотической формулы

$$T_j = T_j^{(0)} + \varepsilon T_j^{(1)} + \Theta_j.$$

Осредненная задача для остаточного члена с учетом имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Theta_1}{\partial \text{Fo}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial \text{Fo}} - 2\chi \frac{\partial \Theta_1}{\partial r}\Big|_{r=1} + \text{Pev} \left\langle R(r) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right\rangle &= -\varepsilon \left( \frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial \text{Fo}} - 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=1} + \text{Pev} \left\langle R(r) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right\rangle \right), \\ \langle \Theta \rangle\Big|_{r=1} &= \Theta_1\Big|_{r=1}, \\ \left( \langle \Theta \rangle + \varepsilon \langle T^{(1)} \rangle \right)\Big|_{\text{Fo}=0} &= 0, \quad \Theta_1\Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \\ \Theta_1\Big|_{r \rightarrow \infty} &= 0, \\ \left( \langle \Theta \rangle + \varepsilon \langle T^{(1)} \rangle \right)\Big|_{z=0} &= 0.\end{aligned}$$

Эта задача имеет тривиальное решение, когда выполнены условия

$$\frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial \text{Fo}} + \text{Pev} \left\langle R(r) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right\rangle = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \text{ а также } \langle T^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \langle T^{(1)} \rangle \Big|_{z=0} = 0.$$

Окончательная постановка задачи для первого коэффициента разложения запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \right), \quad r > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad z > 0, \\ \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + 2\text{Pev} R_1(1) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} + \frac{\Lambda \lambda_2(1) - \lambda_1(r)}{\chi} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{2 \partial \text{Fo}^2} + \frac{2\Lambda \text{Pe}^2 v^2}{\chi} (R_5(1) - R_1(1) R_2(r)) \times \\ &\times \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{\Lambda}{2\chi} [4R_3(1) - 2R_2(r) + R_4(1) - r^2 R_1(1)] \text{Pev} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z \partial \text{Fo}} = 2\chi \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad r < 1, \quad \text{Fo} > 0, \\ T^{(1)} \Big|_{r=1} &= T_1^{(1)} \Big|_{r=1}, \\ \langle T^{(1)} \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} &= 0, \quad T_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \\ T_1^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} &= 0, \\ \langle T^{(1)} \rangle \Big|_{z=0} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, решая задачу для первого коэффициента разложения в предположении малых времен, получим

$$\begin{aligned} T^{(0)} &\approx T_0 \text{erfc} \left( \frac{\chi z}{R_1(1) \text{Pev}} / \sqrt{\text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1) \text{Pev}}} \right) \Phi \left( \text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1) \text{Pev}} \right) + \\ &+ \int_0^z (1 - \text{H}) \text{erfc} \left( \chi(z - \xi) / R_1(1) \text{Pev} \sqrt{\text{Fo} - \frac{z - \xi}{2R_1(1) \text{Pev}}} \right) \Phi \left( \text{Fo} - \frac{z - \xi}{2R_1(1) \text{Pev}} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Первый коэффициент представляет радиальное распределение температуры в турбулентном потоке, однако для анализа наибольший интерес представляет не само первое приближение, а разность температур между стенкой скважины и любой точкой внутри скважины  $\tilde{T} = T - T|_{r=1}$ . В предположении малых времен в пространстве оригиналов выражение для перепада температур запишется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{T} &\approx \frac{\Lambda}{\chi} T_0 \Phi \left( \text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1) \text{Pev}} \right) \left\{ \left( \frac{\lambda_1(r) - \lambda_1(1)}{2} - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{2R_1(1)} \right) \Psi \left( \frac{\chi z}{R_1(1) \text{Pev}}, \text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1) \text{Pev}} \right) - \right. \\ &- \frac{R_2(r) - R_2(1)}{R_1(1)} \chi / \sqrt{\pi \left( \text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1) \text{Pev}} \right)} \exp \left( -\chi^2 z^2 / 4R_1^2(1) \text{Pe}^2 v^2 \left( \text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1) \text{Pev}} \right) \right) \left. \right\} + \\ &+ \frac{\Lambda(1 - \text{H})}{\chi} \int_0^z \Phi \left( \text{Fo} - \frac{z - \xi}{2R_1(1) \text{Pev}} \right) \left\{ \left( \frac{\lambda_1(r) - \lambda_1(1)}{2} - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{2R_1(1)} \right) \Psi \left( \frac{\chi(z - \xi)}{R_1(1) \text{Pev}}, \text{Fo} - \frac{z - \xi}{2R_1(1) \text{Pev}} \right) - \right. \\ &- \frac{R_2(r) - R_2(1)}{R_1(1)} \chi / \sqrt{\pi \left( \text{Fo} - \frac{z - \xi}{2R_1(1) \text{Pev}} \right)} \exp \left( -\chi^2 (z - \xi)^2 / 4R_1^2(1) \text{Pe}^2 v^2 \left( \text{Fo} - \frac{z - \xi}{2R_1(1) \text{Pev}} \right) \right) \left. \right\} \end{aligned}$$

Полученные выше выражения представляют «в среднем точное» решение общей задачи термокариотажа для турбулентного режима течения.

Полученные формулы позволяют построить зависимости температуры от времени координат. Для расчета размерных кривых использованы следующие значения параметров скважины:  $D = 2000$  м,  $r_0 = 0.1$  м,  $\Gamma = 0.02$  К/м,  $c_1 = 950$  Дж/(К·кг),  $\rho_1 = 2000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_{r1} = 0.67$  Вт/(м·К); нефть:  $c = 2000$  Дж/(К·кг),  $\rho = 743.5$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 0.15$  Вт/(м·К),  $\mu = 0.85$  мПа·с.

На рисунке 3 представлены радиальные распределения температуры нефтяного потока. Кривые рассчитаны по формуле  $\tilde{\theta} = \theta(r) - \theta(r=1)$  для различных значений дебитов при турбулентном режиме течения.

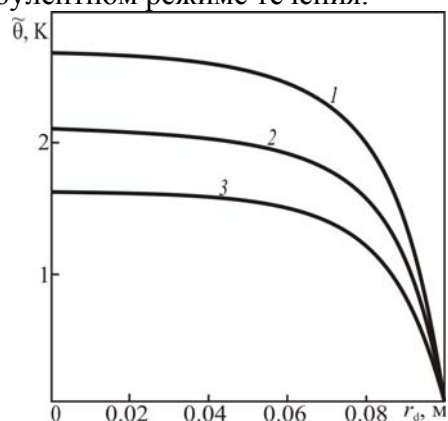


Рис. 3. Радиальные распределения температуры при турбулентном режиме течения для разных значений дебита: 1 –  $Q = 50$  м<sup>3</sup>/сут, 2 –  $Q = 40$ , 3 –  $Q = 32$

Итак, на основе в «среднем точного» асимптотического метода развита модель аналитического приближенного описания температурного поля турбулентного потока в скважине. Показано, что нулевое приближение представляет осредненное значение температуры по сечению скважины и не зависит от режима течения, т. е. описывает температурное поле как турбулентного, так и ламинарного режимов течения. Это означает также, что выполненные ранее на основе нулевого приближения расчеты для ламинарного режима течения и выровненного профиля скорости применимы для изучения средних температур турбулентного потока в скважине. Вклад турбулентного режима учитывается первым коэффициентом асимптотического разложения.

### Литература

1. Кэйс В. М. Конвективный тепло- и массообмен. М., «Энергия». – 1972.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика: Учебное пособие для студентов университетов. 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
3. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В., Горюнова М.А. Анализ температурного поля цилиндрического потока на основе «в среднем точного» решения // Прикладная математика и техническая физика, 2010. Т. 51. №3. С. 84 – 93.
4. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В. Основная задача термокаротажа // Теплофизика высоких температур, 2006. Т. 44. №5. С. 747 – 755.
5. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В., Горюнова М.А. Построение «в среднем» асимптотического решения задачи о радиальном распределении температурного поля в скважине // Теплофизика высоких температур, 2008. Т. 46. №3. С. 449 – 456.