

**О ВЛИЯНИИ ТЕПЛООБМЕНА
НА АВТОКОЛЕБАНИЯ В РЕАГИРУЮЩЕЙ ГАЗОВЗВЕСИ**

О. В. Шарыпов^{1,2}, И. С. Ануфриев¹

¹ Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

sharypov@itp.nsc.ru

Рассматривается динамика слабых возмущений конечной амплитуды в гомогенной газозвеси (реагирующая газовая смесь и химически инертные твердые частицы). Слабонелинейная модель учитывает кинетико-волновое взаимодействие и диссипативные свойства. Проанализировано влияние межфазного обмена теплом и импульсом на устойчивость однородного состояния системы. Для модельной кинетики реакции получены численные решения эволюционного уравнения в виде установившихся автоколебаний. Описано резкое увеличение характерного периода автоколебаний и подавление неустойчивости в газозвеси с частицами малого размера.

Введение

Исследование динамики волновых возмущений в химически реагирующих многофазных системах важно для обеспечения безопасности технологий сжигания топлив. Известный эффект усиления слабых волн в системах с горением [1-3] может приводить к нежелательным последствиям вплоть до возникновения взрывных режимов. Этот эффект основан на положительной обратной связи газодинамических и химико-кинетических параметров. Слабые возмущения из определенной части спектра могут оказаться неустойчивыми и привести к тем или иным автоколебательным (автоволновым) режимам в активно-диссипативной системе. В многофазных реагирующих системах существенное стабилизирующее влияние оказывает

межфазный обмен импульсом и энергией. Высокая интенсивность диссипативных процессов не только препятствует возникновению автоколебаний в реагирующей среде, но и приводит к затягиванию инициирования или к срыву самовоспламенения. Характерным примером служит детонационная волна в смеси газов с химически инертными твердыми микрочастицами («dusty detonations» [4]). Экспериментально и численно показано, что увеличение массовой доли твердой фазы или уменьшение размера частиц приводит к ослаблению и срыву детонации [4-10]. Эксперименты с частицами $10\text{-}10^3$ мкм [6] дают основание предположить, что определяющим фактором является удельная площадь межфазной поверхности, которая пропорциональна отношению массовой доли к размеру частиц.

Для газозвеси свойственно наличие дополнительных характерных масштабов – времени тепловой и скоростной релаксации частицы. По сравнению со временем релаксации газодинамические возмущения могут быть низкочастотными («мелкие» частицы), что означает слабую тепловую и скоростную неравновесность фаз. В [11] представлена модель динамики плоских возмущений в химически инертной газозвеси, учитывающая особенности межфазного теплообмена в различных предельных случаях. На основе аналогичного подхода в [12] выведено нелинейное эволюционное уравнение для плоских возмущений в однофазной реагирующей среде, получено решение в форме автоволны, самопроизвольно возникающей в активно-диссипативной системе. В согласии с результатами [13] эта модель в пределе длинных волн описывает усиление возмущений за счет тепловыделения реакции. Дальнейшие шаги по обобщению результатов работ [11, 12] предприняты в [14-16]. Химическая реакция означает наличие еще одного характерного масштаба времени. В отличие от распространенного подхода, в работах [14-16] не используются полуэмпирические законы обтекания частиц и межфазного теплообмена. В [14, 15] проанализировано влияние «мелких» частиц. Показано, что, занимая ничтожно малую долю объема, они могут повышать диссипативные свойства системы на два-три порядка. Это приводит к сильному увеличению периода автоколебаний, либо к полному подавлению неустойчивости. В противоположном пределе межфазный обмен оказывает слабое влияние на динамику возмущений [16].

Оценка времени релаксации для частиц с размером 10 мкм и более дает величину 10 мс и выше. Это намного превосходит характерный период автоколебаний (поперечных волн) в детонационной волне, т.е. такие частицы не могут считаться «мелкими». Тем самым, представляет интерес получить теоретические предсказания о характере влияния частиц с размером менее 1 мкм на динамику возмущений в реагирующей газозвеси.

Постановка задачи

Рассмотрим распространение плоских возмущений в неограниченном объеме газозвеси, содержащей в единице объема m химически инертных твердых частиц (частицы сферические с одинаковым радиусом $r_1 = \text{const}$ и плотностью $\rho_1 = \text{const}$). В отсутствие возмущений скорость каждой из фаз равна нулю. Относительный объем конденсированной фазы мал ($\bar{V}_1 = 4\pi r_1^3 m/3 = O(\varepsilon)$), что позволяет пренебрегать взаимодействием частиц (ε – малый параметр). Предположим, что длина волны возмущения намного превосходит среднее расстояние между частицами. Тогда можно использовать однородную модель двухкомпонентной неравновесной смеси, учитывая различия скоростей и температур фаз. Массовая скорость u , плотность ρ , давление p , температура T и удельная энтропия S газа являются величинами, осредненными по объему, содержащему достаточно большое количество частиц.

Ограничим рассмотрение общей задачи случаем возмущений, имеющих малую, но конечную амплитуду: $|\delta u|, |\delta \rho|, |\delta p|, |\delta T| = O(\varepsilon)$, где $\delta \rho, \delta p, \delta T, \delta u$ – безразмерные возмущения газодинамических параметров: $\delta u = u/C_{f0}$, $\delta \rho = \rho/\rho_0 - 1$, $\delta p = p/p_0 - 1$, $\delta T = T/T_0 - 1$. Индекс 0 обозначает невозмущенное состояние среды, $C_f = \left[(p_\rho)_{S,Y} \right]^{1/2}$ – адиабатическая скорость звука в газе, Y – массовая доля продуктов реакции. Запись $(p_\rho)_{S,Y}$ обозначает частную производную от давления по плотности, вычисляемую при условиях $S = \text{const}$, $Y = \text{const}$, индекс f указывает, что значение переменной вычисляется при условии

$Y = \text{const}$ (то есть для высокочастотных возмущений, относительно которых реакция «заморожена»).

Примем предположение, что все воздействия на динамику возмущений в газе, связанные с химической реакцией, межфазным обменом и эффектами вязкости и теплопроводности газа, являются слабыми и могут быть представлены в уравнениях членами второго (и выше) порядка малости.

Уравнения неразрывности для газовой фазы и для облака не взаимодействующих частиц:

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad (1)$$

$$m_t + u_1 m_x + m u_{1x} = 0. \quad (2)$$

Здесь u_1 – скорость облака частиц, $|u_1|/C_{f0} = O(\varepsilon)$; нижние индексы t, x всюду обозначают частные производные по времени и по координате.

Уравнения сохранения импульса (без учета гравитации) для каждой из компонент [17, 18]:

$$\rho(1 - \bar{V}_1)(u_t + u u_x) + p_x - \nu \rho u_{xx} + f = 0, \quad (3)$$

$$\rho_1 \bar{V}_1 (u_{1t} + u_1 u_{1x}) - f = 0, \quad (4)$$

где ν – кинематическая вязкость газа, $\rho_1 \bar{V}_1$ – плотность облака частиц (массовая доля твердой фазы), f – сила сопротивления облака частиц в единице объема. Вследствие предположения о том, что $\bar{V}_1 = O(\varepsilon)$ и твердые частицы не взаимодействуют, давление в газовой фазе совпадает с давлением в двухфазной среде, а поправка к вязкости газа и вязкость облака частиц – пренебрежимо малы. Известно выражение для силы сопротивления f_1 , действующей на шар с радиусом r_1 , движущийся в среде со скоростью $w(t, x)$, [19, § 24]:

$$f_1 = -6\pi\rho r_1^3 \left(\frac{vw}{r_1^2} + \frac{w_t}{9} + \sqrt{\frac{v}{r_1^2 \pi t_0}} \int_{\sqrt{t-\zeta}}^t \frac{w_\zeta d\zeta}{\sqrt{t-\zeta}} \right) = -f/m. \quad (5)$$

Для достаточно «мелких» частиц (т.е. в случае низкочастотных возмущений) эффектами нестационарности можно пренебречь: $f = \frac{9}{2}\rho\bar{V}_1 \frac{v}{r_1^2} w = O(\varepsilon^2)$. Это означает, что первое слагаемое (сила Стокса) является определяющим в выражении для силы сопротивления. Тогда для относительной скорости движения фаз из уравнения (4) получим с точностью до членов первого порядка малости:

$$w = u - u_1 = \tau_v u_{1t} + o(\varepsilon). \quad (6)$$

При описании детонации в запыленных средах обычно используют полуэмпирические законы обтекания частиц [20, гл. 8]: $f \sim C_D \bar{V}_1 / r_1$, причем для частиц с $r_1 \geq 10^{-5}$ м коэффициент сопротивления $C_D \approx \text{const}$ и сила сопротивления f пропорциональна удельной площади межфазной поверхности в соответствии с экспериментальными данными [6]. Такая же зависимость характерна для силы Бассэ (третье слагаемое в выражении (5)).

Неравновесная химическая реакция в предварительно перемешанной газовой смеси характеризуется объемной скоростью образования продуктов реакции ω и удельным тепловыделением Q . Представим реакцию в виде одноступенчатого превращения «реагенты \rightarrow продукты реакции» с кинетической зависимостью общего вида:

$$\omega(p, S, Y) = \rho(p, S, Y) dY/dt. \quad (7)$$

Закон сохранения энергии с учетом термодинамических соотношений позволяет записать уравнение для производства энтропии:

$$\rho T \frac{dS}{dt} = Q\omega - q + \rho c_p \chi T_{xx} + (u - u_1) f + \sigma, \quad (8)$$

где σ учитывает производство энтропии за счет вязкости, оно пропорционально величине $v(u_x)^2$, c_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, χ – температуропроводность газа, $q = 4\pi r_1^2 m q_1$ – тепловая мощность, отводимая от газа к облаку частиц в единице объема. Поток тепла на поверхности отдельной частицы $q_1 = \rho_1 c_1 \chi_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=r_1}$ определяется из решения задачи о центральносимметричном распределении температуры $T_1(t, r)$ в шаре с радиусом r_1 , плотностью ρ_1 , температуропроводностью χ_1 и удельной теплоемкостью c_1 при начальном условии $T_1(0, r) = T_0$. Температуру поверхности частицы $T_1(t, r_1)$ считаем равной температуре окружающего газа. Решение $T_1(t, r)$, полученное согласно теореме Дюамеля [21], в предельном случае «мелких» частиц (характерное время тепловой релаксации частицы $\tau_q \sim r_1^2 / \chi_1$ намного меньше периода газодинамических возмущений) приводит к следующему выражению для тепловой мощности [11]:

$$q = \bar{V}_1 \rho_1 c_1 \left(T_t - \frac{r_1^2 T_{tt}}{\chi_1 15} \right) = O(\varepsilon^2). \quad (9)$$

В противоположном предельном случае [11]:

$$q = \frac{6\bar{V}_1 \rho_1 c_1 \chi_1}{r_1^2} (T - T_0). \quad (10)$$

Предположение о слабости диссипативных эффектов означает, что в уравнении (8) следует пренебречь последними двумя слагаемыми, которые пропорциональны квадрату амплитуды возмущений скорости.

Уравнение состояния газовой фазы при наличии химической реакции задается в общей форме $\rho = \rho(p, S, Y)$ или:

$$\frac{d\rho}{dt} = (\rho_p)_{S,Y} \frac{dp}{dt} + (\rho_S)_{p,Y} \frac{dS}{dt} + (\rho_Y)_{p,S} \frac{dY}{dt}.$$

Используя уравнения (7) и (8), преобразуем уравнение состояния, аналогично [12], отбрасывая члены $\sim o(\varepsilon^2)$:

$$C_f^{-2} \frac{dp}{dt} - \frac{d\rho}{dt} + B = A, \quad (11)$$

где C_f – «замороженная» адиабатическая скорость звука, $B = \beta(q/c_p - \rho\chi T_{xx})$, $\beta = V^{-1}(V_T)_{p,Y}$ – «замороженный» температурный коэффициент изобарического расширения газа, V – удельный объем газа, $A = \omega(\beta Q/c_p - (\rho_Y)_{p,S}/\rho)$, $\beta Q/c_p$ – безразмерное тепловыделение, слагаемое $(\rho_Y)_{p,S}/(-\rho)$ характеризует относительное изменение удельного объема газа вследствие изменения молекулярного веса при химическом превращении. Вся информация о химической реакции содержится в правой части уравнения состояния (11), причем в отсутствие реакции $A = 0$, поскольку $\omega = 0$. Согласно (11), в общем случае A следует считать величиной первого порядка малости.

Используя уравнения (7), (8), (11), можно преобразовать тождество

$$\frac{dA}{dt} = (A_p)_{S,Y} \frac{dp}{dt} + (A_S)_{p,Y} \frac{dS}{dt} + (A_Y)_{p,S} \frac{dY}{dt}$$

к виду

$$\left(1 + \frac{\tau C_f^2}{N} \frac{d}{dt}\right) \left[\frac{1}{C_f^2} \frac{dp}{dt} - \frac{d\rho}{dt} + B \right] - D \frac{d\rho}{dt} = o(\varepsilon^2), \quad (12)$$

где $C^2/C_f^2 = (1-D)^{-1} = 1 + D + O(\varepsilon^2)$, $N = (1+L)(1-D) = 1 + L - D + O(\varepsilon^2)$,

$$L = Q(A_S)_{p,Y} [T(A_Y)_{p,S}]^{-1} = O(\varepsilon), \quad D = \frac{\tau C_f^2 (A_p)_{S,Y}}{(L+1)} = \tau C_f^2 (A_p)_{S,Y} = O(\varepsilon),$$

$$\tau = \frac{-\rho}{(A_Y)_{p,S}} \left(\frac{\beta_{pf} Q}{c_p} - \frac{(\rho_Y)_{p,S}}{\rho} \right) - \text{характерное время реакции, } C - \text{ скорость распространения}$$

низкочастотных возмущений, D определяет дисперсию скорости возмущений, связанную с неравновесной химической реакцией.

Согласно уравнению (12), в первом порядке малости процесс распространения возмущений можно считать адиабатическим: химическая реакция, диссипативные процессы и межфазный обмен не оказывают влияния на динамику возмущений. Соответственно, в слагаемых высокого порядка малости можно производить замены, используя соотношения между величинами, записанные с точностью до членов первого порядка малости. В частности, можно использовать уравнение (6), а также связи между параметрами идеального газа: $\delta T = (1 - \gamma_0^{-1}) \delta p = (\gamma_0 - 1) \delta p = (\gamma_0 - 1) \delta u$, где γ – отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

Квазилинейное эволюционное уравнение

Приведя все величины в уравнениях (1), (3), (6) и (12) к безразмерной форме с помощью параметров τ_0 , C_{f0} , ρ_0 , T_0 , получим:

$$\rho'_t + u' \rho'_x + u'_x + \rho' u'_x = o(\varepsilon^2), \quad (13)$$

$$u'_t + \rho' u'_t - \bar{V}_{10} u'_t + u' u'_x + p'_x - \bar{v} u'_{xx} + \bar{\rho}_1 \bar{V}_{10} (u' - u_1') / \bar{\tau}_v = o(\varepsilon^2), \quad (14)$$

$$u' - u_1' = \bar{\tau}_v (u_1')_t + o(\varepsilon), \quad (15)$$

$$\left(1 + \frac{\bar{\tau}}{N} \frac{d}{dt} \right) \left[p'_t - \rho'_t - \frac{(\gamma_0 - 1)}{2} \rho' p'_t + u' p'_x - u' \rho'_x + \bar{B} \right] - D_0 \rho'_t = o(\varepsilon^2), \quad (16)$$

где $p' = \gamma_0^{-1} \delta p$, $T' = \delta T$, $\rho' = \delta \rho$, $u' = \delta u$, $u_1' = u_1 / C_{f0}$, $\bar{\tau}_v = \tau_v / \tau_0 = 2\bar{\rho}_1 r_1^2 / 9v\tau_0$, $\bar{\rho}_1 = \rho_1 / \rho$,

$\bar{\tau} = \tau / \tau_0 = 1 + O(\varepsilon)$, $\bar{\chi} = (\chi / \tau C_f^2)_0 = O(\varepsilon)$, $\bar{\tau}_q = \tau_q / \tau_0 = c_1 r_1^2 / 15c_{p0} \chi_1 \tau_0$, $\bar{v} = (v / \tau C_f^2)_0 = O(\varepsilon)$,

$$\bar{B} = \bar{\beta}(\gamma_0 - 1) \left[\bar{\rho}_1 \bar{V}_{10} \left(\frac{c_1}{c_{p0}} \rho'_t - \bar{\tau}_q \rho'_u \right) - \bar{\chi} \rho'_{xx} \right] + o(\varepsilon^2), \quad \bar{\beta} = \beta T = 1 + O(\varepsilon). \quad \text{В уравнении (16)}$$

учтена зависимость адиабатической скорости звука от амплитуды слабых возмущений:

$$C_f^2 / C_{f0}^2 = 1 + \rho'(\gamma_0 - 1) / 2 + O(\varepsilon^2).$$

Рассмотрим возмущения, распространяющиеся в одну сторону. В силу сделанных предположений профиль этих возмущений в сопровождающей системе координат, движущейся со скоростью C_{f0} , должен изменяться во времени очень медленно. Введем координату и время

в движущейся системе координат: $y = x - t$, $z = t$. Тогда $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial}{\partial z} = O(\varepsilon).$$

В движущейся системе координат уравнения (13)-(16) примут вид:

$$(u' - \rho')_y + \rho'_z + (u' \rho')_y = o(\varepsilon^2), \quad (17)$$

$$p'_y - u'_y + u'_z - \rho' u'_y + \bar{V}_{10} u'_y + u' u'_y - \bar{v} u'_{yy} + \bar{\rho}_1 \bar{V}_{10} (u' - u_1') / \bar{\tau}_v = o(\varepsilon^2), \quad (18)$$

$$\bar{\tau}_v (u_1')_y - u_1' = -u' + o(\varepsilon), \quad (19)$$

$$\left(1 - \frac{\bar{\tau}}{N} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + u' \frac{\partial}{\partial y} \right) [\rho'_y - p'_y] + \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[\frac{p'_z - \rho'_z + (\gamma_0 - 1)}{2} \rho' p'_y + u' p'_y - u' \rho'_y + \bar{B} \right] + D_0 \rho'_y = o(\varepsilon^2), \quad (20)$$

где $\bar{B} = \bar{\beta}(\gamma_0 - 1) \left[\bar{\rho}_1 \bar{V}_{10} (-c_1 c_{p0}^{-1} \rho'_y - \bar{\tau}_q \rho'_{yy}) - \bar{\chi} \rho'_{yy} \right] + o(\varepsilon^2)$.

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (19) можно искать в форме суммы гармоник, представив правую часть уравнения в виде:

$$u' = \sum_{j=0}^{\infty} u'_j = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{u}_j(z) \exp(ik_j y). \text{ Тогда получим общее решение } u_1' = U(z, y) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u'_j}{(1 - ik_j \bar{\tau}_v)},$$

где решение однородного уравнения $U(z, y) = \hat{U}(z) \exp(y/\bar{\tau}_v)$ не зависит от u' . Поскольку в отсутствие газодинамических возмущений скорость частиц должна быть равна нулю, т.е.

$u_1' = 0$ при $u'(z, y) = 0$, то $\hat{U}(z) = 0$ (строго говоря, $\hat{U}(z) = O(\varepsilon^2)$). При $\kappa_j^2 \bar{\tau}_v^2 \ll 1$ полученное

решение можно записать в форме: $u_1' = \sum_{j=0}^{\infty} u'_j \exp(ik_j \bar{\tau}_v)$. Это означает, что из-за инерции

бесконечно малые (линейные) колебания скорости облака частиц сдвинуты по фазе на величину $\kappa_j \bar{\tau}_v$ относительно длинноволновых колебаний скорости газа.

Полученное выражение для относительной скорости

$$u' - u_1' = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{u}_j(z) \exp(ik_j y) \frac{-ik_j \bar{\tau}_v + \kappa_j^2 \bar{\tau}_v^2}{1 + \kappa_j^2 \bar{\tau}_v^2}$$

можно упростить в случае низкочастотных возмущений ($\kappa_j^2 \bar{\tau}_v^2 \ll 1$):

$$u' - u_1' = -\bar{\tau}_v (u'_y + \bar{\tau}_v u'_{yy}) + o(\varepsilon)$$

и в такой форме использовать в уравнении (18).

Тогда с принятой точностью можем записать эволюционное уравнение:

$$\left[1 - \frac{\partial}{\partial y} \right] (h_z - M_0 h - M_1 h_y - M_2 h_{yy} - M_3 h h_y) + M_4 h_y = o(\varepsilon^2), \quad (21)$$

где h пропорционально возмущению скорости, плотности, давления или температуры газа.

Коэффициент при нелинейном слагаемом: $M_3 = -(3 + \gamma_0)/4$. Коэффициент при слагаемом,

связанном с реакцией: $M_4 = D_0/2$. Выражения для коэффициентов M_0, M_1, M_2 зависят от

рассматриваемого предельного случая. Для «мелких» частиц сила сопротивления определяется

первым слагаемым в уравнении (5), тепловой поток – уравнением (9). Соответственно получим:

$$M_0 = 0, \quad M_1 = 0,5\bar{\rho}_1\bar{V}_{10}\left(1 + (\gamma_0 - 1)\frac{c_1}{c_{p0}} - \frac{1}{\bar{\rho}_1}\right), \quad M_2 = 0,5\left[(\gamma - 1)\bar{\chi} + \bar{v} + \bar{\rho}_1\bar{V}_1(\bar{\tau}_v + (\gamma - 1)\bar{\tau}_q)\right]_0 \quad [14,$$

15]. Если же f определяется вторым слагаемым в уравнении (5), и q – уравнением (10), то, согласно [16]: $M_0 = -3(\gamma_0 - 1)\bar{\rho}_1\bar{V}_{10}/\bar{\tau}_q$, $M_1 \approx -3\bar{V}_{10}/4$, $M_2 = (\bar{v} + (\gamma_0 - 1)\bar{\chi})/2$. В этом случае конденсированная фаза не оказывает значительного влияния на динамику возмущений.

Динамика бесконечно малых возмущений

Решение уравнения (21) для бесконечно малых возмущений можно представить в виде суперпозиции гармоник: $h_j(z, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{h}_j \exp(\Omega_j z + i\kappa_j y)$, где инкремент возмущения Ω связан

с волновым числом κ дисперсионным соотношением:

$$\Omega = M_0 + \kappa^2 \left(\frac{M_4}{1 + \kappa^2} - M_2 \right) + i\kappa \left(M_1 - \frac{M_4}{1 + \kappa^2} \right). \quad (22)$$

Действительная часть инкремента определяет изменение амплитуды возмущения во времени. Возмущения с длиной волны $\lambda = 2\pi/\kappa$ являются неустойчивыми, если $\text{Re}(\Omega) > 0$. Мнимая часть инкремента определяет дисперсию скорости звука в среде. Далее будем использовать выражения для M_0 , M_1 , M_2 , соответствующие случаю «мелких» частиц.

При $\kappa^2 = O(\varepsilon^{-1})$, то есть для высокочастотных (по сравнению с характерным временем реакции τ_0) возмущений получим из (22):

$$\Omega = -M_2\kappa^2 + i\kappa M_1, \quad (23)$$

Дисперсионное соотношение (23) описывает затухание коротковолновых возмущений благодаря потерям энергии за счет диссипативных свойств двухфазной среды. Причем

основная роль принадлежит межфазному обмену импульсом, вклад которого в M_2 являются определяющим. Химическая реакция в этом предельном случае не оказывает влияния на динамику возмущений. Скорость распространения возмущений при $\bar{\rho}_1 \gg 1$: $C_e^2/C_{f0}^2 = 1 - \bar{V}_{10}\bar{\rho}_1(1 + (\gamma_0 - 1)c_1/c_{p0})$, что совпадает с известным результатом для адиабатической скорости звука в равновесной (по температуре и скорости фаз) смеси идеального газа и несжимаемых частиц при малой объемной концентрации [22, гл. 1].

В случае низкочастотных возмущений ($\kappa^2 = O(\varepsilon)$) дисперсионное соотношение учитывает эффекты, связанные с химической реакцией:

$$\Omega = (M_4 - M_2)\kappa^2 + i\kappa(M_1 - M_4). \quad (24)$$

В выражении (24) коэффициенты при степенях волнового числа могут изменять знаки в зависимости от соотношения различных механизмов. При выполнении критерия $M_4 - M_2 > 0$ бесконечно малые возмущения будут нарастать за счет тепловыделения реакции, превышающего диссипативные потери энергии. В случае эндотермической реакции ($Q < 0$) неустойчивость длинноволновых возмущений не имеет места, и реакция обеспечивает дополнительное затухание возмущений. Согласно (24), скорость распространения низкочастотных возмущений отличается от скорости звука в высокочастотном пределе на величину M_4 , которая определяется кинетикой реакции. При $M_4 > M_1$ возмущения будут распространяться со скоростью, превышающей C_{f0} .

На основании соотношения (22) можно определить волновое число κ_* наиболее быстро нарастающего возмущения, а также критическое волновое число κ_c , разделяющее устойчивые и неустойчивые гармоники: $\kappa_*^2 = \sqrt{M_4/M_2} - 1$, $\kappa_c^2 = M_4/M_2 - 1$. В области с размером, превышающим величину $\lambda_c = 2\pi/\kappa_c$, при условии $M_4 > M_2$ должна наблюдаться неустойчивость слабых возмущений. Если в начальный момент времени в спектре нет

выделенной по амплитуде гармоники, то неустойчивость приводит к появлению доминирующей гармоники с длиной волны $\lambda_* = 2\pi/\kappa_*$. Если размер области окажется в диапазоне от λ_c до λ_* , то наиболее быстро растущей гармонике будет соответствовать длина волны, равная размеру области. Характерное время нарастания возмущений составляет: $t_e = [\text{Re}(\Omega(\kappa_*))]^{-1} = (\sqrt{M_4} - \sqrt{M_2})^{-2}$. С повышением амплитуды решения возрастает роль нелинейных слагаемых в эволюционном уравнении (21). Нелинейность способствует росту амплитуды высокочастотных гармоник, линейная часть уравнения напротив – обеспечивает затухание возмущений из коротковолновой части спектра. Баланс этих механизмов достигается при установлении решения, т.е. при определенном значении амплитуды и формы волны. Установившийся спектр сигнала означает наличие своеобразного «динамического равновесия» в системе: накачка энергии длинноволновых возмущений (за счет тепловыделения реакции) компенсируется нелинейным механизмом передачи этой энергии в высокочастотную часть спектра и ее диссипацией. Наряду с этим, нелинейность дает вклад в скорость (пропорциональный h), что приводит к характерной асимметрии формы волны: при $M_3 < 0$ передний фронт – более крутой. Более подробное изучение нелинейной стадии эволюции возмущений возможно на основе численного моделирования.

Численное решение

Чтобы продемонстрировать возможность установления решения и проанализировать характерные особенности его структуры, проведена серия расчетов эволюции возмущений, описываемой уравнением (21).

К уравнению (21) применен оператор $[1 + \partial/\partial y]$, преобразованное уравнение аппроксимировано центральными конечными разностями по неявной двухслойной схеме с периодическими граничными условиями. Погрешность разностной аппроксимации $\sim O(\xi^2 + \hat{\tau})$.

Применение к уравнению (21) оператора $[1 + \partial/\partial y]$ позволяет получить систему разностных уравнений с «почти трехдиагональной» симметрической матрицей коэффициентов, что позволяет применить алгоритм трехточечной циклической прогонки, условие устойчивости которого не накладывало ограничений на шаг по времени). При периодических граничных условиях гладкое решение аппроксимируемого уравнения совпадает с искомым решением уравнения (21).

В качестве начального условия использовался однородный по спектру слабый случайный сигнал («шум»), описываемый суперпозицией гармонических возмущений с одинаковой амплитудой $a = 10^{-5}$ и случайными фазами $\varphi_j \in [-\pi; \pi]$: $H_k^0 = a \sum_{j=1}^{M/2} \cos(\kappa_j k \xi + \varphi_j)$, где

H_k^0 – сеточная функция, аппроксимирующая $h(z, y)$, ξ – шаг сетки по пространству, $k = 0, 1, \dots, M-1$ – номер узла, $y = k\xi$, $\theta = 0, 1, 2, \dots$ – номер шага по времени, $\hat{\tau}$ – шаг по времени, $\theta \hat{\tau} = z$.

Анализ устойчивости линеаризованной разностной схемы показал, что в высокочастотном пределе ($\kappa_j \xi \rightarrow \pi$, $\xi^2 \ll 1$) схема устойчива при $\hat{\tau} \leq \xi^2 / 2M_2$, а при $\kappa_j^2 \ll 1$ условием устойчивости при $\hat{\tau} \ll 1$ служит неравенство $M_4 \leq (1 + \kappa_j^2) M_2$. Следовательно, если $\kappa_j^2 < \kappa_c^2$, то схема абсолютно неустойчива. Здесь $\kappa_j = 2\pi j / M\xi$ – волновое число гармоники, $j = 0, 1, \dots, M/2$ – номер гармоники, $M = 2^n$ – количество узлов сетки. Тем самым, свойства разностной схемы в длинноволновом пределе в точности соответствуют свойствам аппроксимируемого линеаризованного уравнения. Данная неустойчивость не является дефектом схемы, но отвечает физическому механизму накачки энергии длинноволновых возмущений.

Расчеты соответствовали следующим значениям физических параметров: $p_0 = 10^5$ Па, $\rho_0 = 1,3$ кг/м³, $T_0 = 300$ К, $C_{f0} = 330$ м/с, $\gamma_0 = 1,4$, $c_{p0} = 10^3$ Дж/кг К, $\chi_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\nu_0 = 1,3 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\beta_0 = 1/T_0$, $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\chi_1 = 0,9 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $c_1 = 880$ Дж/кг К, $r_1 = 10^{-6}$ м,

$m_0 = 10^{12} \text{ м}^{-3}$. Использовались модельные значения параметров, связанных с кинетикой реакции: $D_0, \tau_0 = 10^{-5} \text{ с}$.

Точность расчетов контролировалась путем варьирования значений ξ и $\hat{\tau}$ в диапазоне $0,1 \geq \xi \geq 0,0125, 0,01 \geq \hat{\tau} \geq 0,0025$ при условии $\xi M = \text{const}, M = 2^{12}$. При $\xi = 0,025, \hat{\tau} = 0,01$ обеспечивалась удовлетворительная точность решения и устойчивость алгоритма [15, 16].

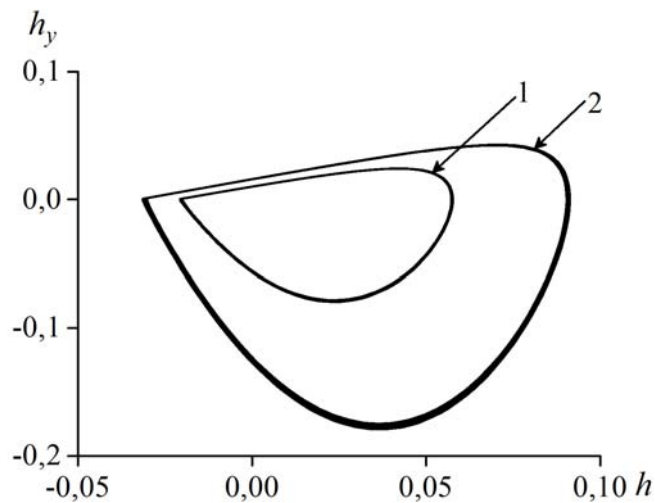


Рис. 1. Изображения установившихся решений на фазовой плоскости, $M_1 = 0,006, M_2 = 0,016,$

$M_3 = -1,1, M_4 = 0,0375$ (линия 1) или $0,05$ (линия 2)

Установившееся решение представляет собой автоколебания газодинамических параметров. На рис. 1 решения представлены на фазовой плоскости при различных значениях D_0 . Эти решения получены при одинаковых начальных условиях. Следует при этом заметить, что изменение значений φ_j не приводит к изменению профиля установившегося решения. Т.е. система «забывает» начальные условия, что характерно для явлений самоорганизации. Ослабление накачки возмущений приводит не только к уменьшению амплитуды автоколебаний, но и к увеличению характерного периода решения и понижению скорости распространения волн.

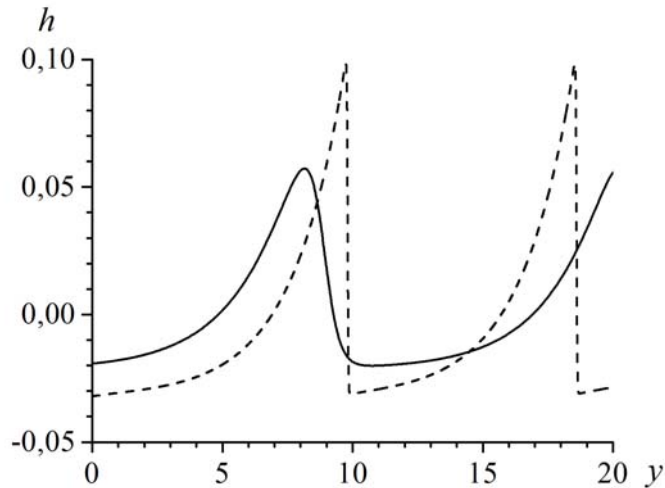


Рис. 2. Установившиеся решения: сплошная линия соответствует решению, представленному

на рис. 1 (линия 1), штриховая линия – решение при $M_1 = 0$, $M_2 = 10^{-3}$, $M_3 = -1,1$,

$$M_4 = 0,0375 \quad (\hat{\tau} = 4 \cdot 10^{-4}, \xi = 10^{-3}, M = 2^{13})$$

Если твердые частицы отсутствуют ($m_0 = 0$), то коэффициенты M_1 и M_2 примут значения: $M_1 = 0$, $M_2 = 10^{-5}$. Из рис. 2 видно, что с понижением межфазного обмена нарастают амплитуда и асимметрия установившегося решения, уменьшается период колебаний.

Выводы

На основе асимптотического подхода создана модель динамики и структуры волн малой, но конечной амплитуды в гомогенной реагирующей двухфазной среде. Показано, что в газозвеси с ничтожной объемной долей твердых частиц малого размера диссипативные эффекты могут значительно превышать уровень, характерный для однофазной среды. Как результат, возрастает характерный период автоколебаний, возникающих в реагирующей системе за счет неустойчивости.

Этот механизм предположительно может оказывать очень сильное влияние на детонацию в запыленных средах, поскольку срыв детонационного режима определяется отношением размера ячейки к диаметру канала. Увеличение периода колебаний в зоне реакции и срыв

детонации в канале численно смоделированы в [7]. Следует заметить, что подобный эффект не удастся объяснить потерями энергии ударной волны на ускорение и разогрев частиц, если массовая доля твердой фазы очень мала.

Используемый подход применим для анализа условий устойчивости квазистационарных режимов протекания реакции в газозвесах. Поскольку эффект усиления имеет место для низкочастотных возмущений, то распределенная газофазная реакция должна закончиться в пределах одного периода колебаний параметров состояния газа. Чтобы этого не происходило, необходимо непрерывное поступление реагентов и удаление продуктов реакции. Подобная ситуация реализуется, в частности, в детонационной волне. В зоне химика, занятой ударно сжатым реагирующим газом, могут распространяться звуковые возмущения и слабые ударные волны. Это проявляется, в частности, в формировании ячеистой структуры детонационной волны. Предложенная модель может быть применена для описания зависимости периода ячеистой структуры детонации в запыленных средах от параметров газозвеси.

Работа выполнена при поддержке РФФИ проект № 10-08-01093-а и Минобрнауки РФ: ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры Инновационной России» на 2009-2013 годы, ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2012 годы».

Литература

[1] Когарко С.М. Усиление волн сжатия при взаимодействии с фронтом пламени. Журнал технической физики. 1960. Т. 30, вып. 1. С. 110-120.

[2] Когарко С.М., Рыжков Л.Д. Исследование усиления волн сжатия при горении. Журнал технической физики. 1961. Т. 31, вып. 2. С. 211-216.

[3] Борисов А.А., Гельфанд Б.Е., Губин С.А. и др. Усиление слабых ударных волн в горячей двухфазной системе жидкость-газ. Прикладная механика и техническая физика. 1970. № 1. С. 168-173.

[4] Kauffman C.W., Wolanski P., Arisoy A., Adams P.R., Maker B.N., Nicholls J.A. Dust, Hybrid and Dusty Detonations. In: Dynamics of Shock Waves, Explosions, and Detonations: AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics. AIAA, New York. 1984. Vol. 94. P. 221-240.

[5] Wolinski M., Wolanski P. Gaseous detonation processes in presence of inert particles. Archivum Combust. 1987. Vol. 7, No. 3, 4. P. 353-370.

[6] Wolanski P., Liu J.C., Kauffman C.W., Nicholls J.A., Sichel M. The effect of inert particles on methan-air detonations. Archivum Combust. 1988. Vol. 8, No. 1. P. 15-32.

- [7] Loth E., Sivier S., Baum J. Dusty detonation simulations with adaptive unstructured finite elements. *AIAA J.* 1997. Vol. 35, No. 6. P. 1018-1024.
- [8]. Papalexandris M.V. Numerical simulation of detonations in mixtures of gases and solid particles. *J. Fluid Mech.* 2004. Vol. 507. P. 95-142.
- [9] Фёдоров А.В., Тропин Д.А., Бедарев И.А. Математическое моделирование подавления детонации водородокислородной смеси инертными частицами. *Физика горения и взрыва.* 2010. Т. 46, № 3. С. 103-115.
- [10] Фомин П.А., Чен Дж.-Р. Влияние химически инертных частиц на параметры и подавление детонации в газах. *Физика горения и взрыва.* 2009. Т. 45, № 3. С. 77-88.
- [11] Борисов А.А., Вахгельт А.Ф. Волновые процессы в двухфазных средах с твердыми частицами. *Волновые процессы в двухфазных средах: Сб. науч. тр. под ред. В.Е. Накорякова.* – Новосибирск: Институт теплофизики СО АН СССР, 1980. – С. 114–124.
- [12] Borissov A.A., Sharypov O.V. Self-sustained solitary waves in non-equilibrium media // *J. Fluid Mech.* 1993. Vol. 257. P. 451-461.
- [13] Накоряков В.Е., Борисов А.А. Распространение возмущений в среде с релаксацией или химической реакцией. *Физика горения и взрыва.* 1976. Т. 12, № 3. С. 414-422.
- [14] Шарыпов О.В., Ануфриев И.С. О влиянии дисперсной фазы на неустойчивость в системах с горением. *Письма в Журнал Технической Физики.* 2011. Т. 37, вып. 21. С. 63-69.
- [15] Шарыпов О.В., Ануфриев И.С. Эволюция слабонелинейных возмущений в газовзвеси с химической реакцией. *Вестник НГУ. Серия Физика.* 2011. Т. 6, вып. 3. С. 11-22.
- [16] Sharypov O.V., Anufriev I.S. Gas-solid suspension with chemical reaction: evolution of weak perturbations. *International Review of Chemical Engineering.* 2011. Vol. 3, No. 6. P. 760-764.
- [17] Баренблатт Г.И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. *Прикладная математика и механика.* 1953. Т. 17, вып. 3. С. 261-274.
- [18] Marble F.E. Dynamics of dusty gases. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1970. Vol. 2. P. 397-446.
- [19] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. *Гидродинамика.* – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. – 736 с.
- [20] Митрофанов В.В. Детонация гомогенных и гетерогенных систем. – Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики им. М. А. Лавреньева СО РАН, 2003. – 200 с.
- [21] Carslaw H.S., Jaeger J.G. *Conduction of heat in solids.* – Oxford, Clarendon Press, 1959.
- [22] Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1978. – 336 с.