

## ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С УЧЕТОМ АБЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФРОНТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

В.А. Кудинов, А.В. Еремин, И.В. Кудинов

*Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия*

На основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий получено приближенное аналитическое решение задачи теплопроводности для бесконечной пластины с учетом перемещения фронта плавления при полном удалении расплавленного вещества (задача Стефана с абляцией). Используемый в работе способ построения дополнительных граничных условий позволяет получать удобные для инженерных приложений решения в виде простых алгебраических полиномов, не содержащих специальных функций. Точность получаемых решений зависит от количества приближений, которое при использовании дополнительных граничных условий не лимитируется.

Во многих технических процессах возникает необходимость определения температурного состояния тел при наличии процессов плавления, кристаллизации, сублимации и проч. Математическое моделирование таких процессов сводится к решению задач с подвижной границей (задачи Стефана). Сложность их решения в том, что наряду с определением температуры вещества, находящегося в различных фазах, требуется также находить закон перемещения фронта фазового перехода с учетом выделяющейся (или поглощаемой) при этом теплоты. Значительный интерес представляют задачи, когда слой вещества, в котором происходит изменение фазового состояния, полностью удаляется (процесс абляции [1]). Результаты расчетов таких процессов могут быть использованы с целью ограничения температуры поверхности нагрева, например, авиационных или космических аппаратов при их высокоскоростном движении в атмосфере.

Искомыми величинами в этих задачах являются распределение температуры в остающемся (нерасплавленном) слое вещества и закон перемещения во времени фронта фазового перехода. Для их определения особенно эффективными оказываются методы, основанные на введении фронта температурного возмущения (интегральные методы теплового баланса) и дополнительных граничных условий [2, 3]. При их использовании кроме фронта фазового перехода  $z(F_0)$  необходимо определять еще закономерность перемещения во времени фронта температурного возмущения  $\delta(F_0)$ , то есть определять глубину прогретого слоя.

В работе [4] этот метод был применен для получения аналитического решения задачи Стефана с абляцией для полупространства. Особенностью решения данной задачи с помощью указанного метода для полубесконечных областей является возможность получения решения, рассматривая лишь две стадии процесса (прогрев поверхности тела до температуры фазового перехода – плавление вещества с определением скорости перемещения фронта плавления). В случае тел конечных размеров решение задачи существенно усложняется и настолько, что двух стадий для полного описания всех протекающих в этом случае процессов оказывается недостаточно и возникает необходимость использования еще одной (третьей) стадии процесса теплообмена и плавления.

В настоящей работе представлены результаты решения задачи Стефана с абляцией для бесконечной пластины в случае, когда при  $\xi = 0$  задан тепловой поток (граничное условие второго рода), а при  $\xi = 1$  задается граничное условие первого рода, совпадающее с начальным условием.

Для получения решения задачи используется интегральный метод теплового баланса, основанный на определении фронта температурного возмущения  $\delta(Fo)$  и дополнительных граничных условий [2–4]. Процесс теплообмена и плавления разделяется на три стадии по времени (рис. 1). Первая из них включает диапазон времени  $(0 \leq Fo \leq Fo_{пл})$ , при котором происходит процесс прогрева поверхности пластины ( $\xi = 0$ ) до температуры плавления. При этом считается, что фронт температурного возмущения не достигает противоположной поверхности пластины ( $\xi = 1$ ), то есть  $\delta(Fo_{пл}) < 1$ , что определяется величиной критерия Кирпичева. Вторая стадия процесса включает диапазон времени  $Fo_{пл} \leq Fo \leq Fo^*$ , в течение которого происходит процесс плавления вещества пластины, определяемого движением фронта плавления  $z(Fo)$ . В конце второй стадии ( $Fo = Fo^*$ ) фронт температурного возмущения достигает поверхности пластины  $\xi = 1$ . В третьей стадии, включающей диапазон времени  $Fo_{пл} \leq Fo \leq Fo_k$ , происходит завершение процесса плавления с определением зависимости фронта плавления  $z(Fo)$  от времени.

Математическая постановка задачи для первой стадии с учетом движения фронта температурного возмущения  $\delta(Fo)$  имеет вид [1–4] (рис. 1)

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}; \quad (0 \leq Fo \leq Fo_{пл}; \quad 0 \leq \xi \leq \delta(Fo_{пл})) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} = -Ki; \quad (2) \quad \Theta(\delta, Fo) = 0; \quad (3) \quad \frac{\partial \Theta(\delta, Fo)}{\partial \xi} = 0, \quad (4)$$

где соотношения (3), (4) представляют условия сопряжения прогретой и непрогретой зон.

Решение задачи (1) – (4) разыскивается в виде [4]

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(\delta) \xi^k, \quad (5)$$

где  $b_k(\delta)$  – неизвестные коэффициенты, в первом приближении определяемые из граничных условий (2) – (4). Соотношение (5) после их нахождения принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = Ki(0,5\delta - \xi + 0,5\xi^2 / \delta). \quad (6)$$

Найдем интеграл взвешенной невязки уравнения (1) в пределах толщины прогретого (термического) слоя  $\delta(Fo)$ , то есть попробуем, чтобы соотношение (14) удовлетворяло не уравнению (1), а некоторому осредненному уравнению – интегралу теплового баланса вида

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^{\delta(Fo)} \Theta(\xi, Fo) d\xi = \int_0^{\delta(Fo)} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (7)$$

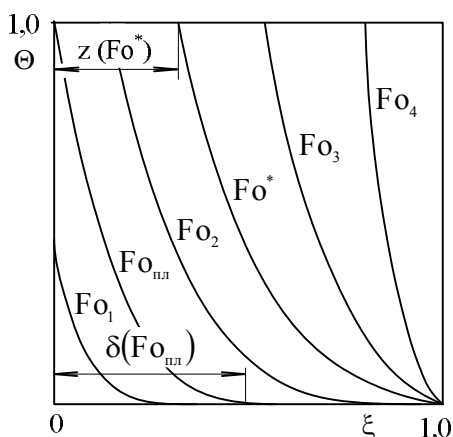


Рис. 1. Расчетная схема теплообмена и плавления

Подставляя (6) в (7), после определения интегралов относительно неизвестной функции  $\delta(Fo)$  получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\delta(Fo)d\delta(Fo) = 3dFo. \quad (8)$$

Интегрируя уравнение (8), при начальном условии  $\delta(0) = 0$  находим

$$\delta(Fo) = \sqrt{6Fo}. \quad (9)$$

Соотношения (6), (8) определяют решение задачи (1) – (4) в первом приближении.

Соотношение (6) для поверхности пластины  $\xi = 0$  принимает вид

$$\Theta(0, Fo) = 0,5Ki\sqrt{6Fo}. \quad (10)$$

Соотношение (10) совпадает с решениями для определения температуры на поверхности полупространства, полученными в работах [1, 5, 6]. Отличие этих решений от точного составляет около 9%.

Повышение точности связано с увеличением числа членов ряда (5), для нахождения неизвестных коэффициентов которого необходимо привлекать дополнительные граничные условия. И, в частности, для получения решения во втором приближении дополнительные граничные условия имеют вид [2, 3].

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Theta(\delta, Fo)}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 \Theta(\delta, Fo)}{\partial \xi^3} = 0. \quad (11)$$

Физический смысл дополнительных граничных условий состоит в выполнении уравнения (1) и производных от него различного порядка в точке  $\xi = 0$  и на фронте температурного возмущения  $\xi = \delta(Fo)$ . Ввиду того что диапазон перемещения фронта температурного возмущения  $0 \leq \delta(Fo) \leq 1$  включает всю область изменения пространственной переменной  $0 \leq \xi \leq 1$ , то, следовательно, чем большее число дополнительных граничных условий будет использовано, тем лучше будет выполняться уравнение (1) внутри рассматриваемой области.

Подстановкой (5) в основные (2) – (4) и дополнительные (11) граничные условия находятся уже шесть неизвестных коэффициентов  $b_k(\delta)$  ( $k = 0, 5$ ), после определения которых из решения цепочной системы алгебраических линейных уравнений соотношение (5) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \delta Ki \left[ \frac{3}{10} - \frac{\xi}{\delta} + \left( \frac{\xi}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\xi}{\delta} \right)^4 + \frac{1}{5} \left( \frac{\xi}{\delta} \right)^5 \right]. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (7), получаем

$$\delta(Fo)d\delta(Fo) = 7,5dFo. \quad (13)$$

Интегрируя (13), при начальном условии  $\delta(0) = 0$  находим

$$\delta(Fo) = \sqrt{15Fo}. \quad (14)$$

Соотношения (12), (14) представляют решение задачи (1) – (4) во втором приближении.

Соотношение (12) для поверхности пластины ( $\xi = 0$ ) будет

$$\Theta(0, Fo) = (3Ki\sqrt{15Fo})/10 = 0. \quad (15)$$

Температуры, получаемые из (15), отличаются от точных их значений не более чем на 2,6%, следовательно, во втором приближении происходит существенное уточнение решения по сравнению с первым.

Дополнительные граничные условия в любом последующем приближении находятся из следующих общих формул

$$\frac{\partial^i \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^i} = 0; \quad \frac{\partial^{i-1} \Theta(\delta, Fo)}{\partial \xi^{i-1}} = 0; \quad \frac{\partial^i \Theta(\delta, Fo)}{\partial \xi^i} = 0. \quad (i = 5, 7, 9, 11, \dots) \quad (16)$$

После подстановки соотношения (5) во все основные и дополнительные граничные условия относительно неизвестных коэффициентов  $b_k(\delta)$  всякий раз будем получать цепочные системы алгебраических линейных уравнений, из которых эти коэффициенты легко могут быть найдены при любом числе приближений.

При решении задач теплопроводности с учетом перемещения фронта плавления в момент начала плавления необходимо знать начальную величину фронта температурного возмущения  $\delta(Fo_{\text{пл}})$ . Так как в момент начала плавления температура на поверхности пластины  $\Theta(0, Fo) = \Theta_{\text{пл}} = 1$ , то величина  $\delta(Fo_{\text{пл}})$ , определяемая в первом и во втором приближениях по формулам (6) и (12), соответственно будет иметь вид

$$\delta(Fo_{\text{пл}}) = 2 / Ki ; \quad (17) \quad \delta(Fo_{\text{пл}}) = 10 / (3Ki) . \quad (18)$$

Согласно (6) фронт температурного возмущения  $\delta(Fo)$  не достигает противоположной стенки пластины ( $\xi = 1$ ) для всех значений числа Кирпичева  $Ki \geq 2$ , при которых температура на поверхности стенки  $\xi = 0$  достигает температуры плавления  $\Theta(0, Fo_{\text{пл}}) = 1$ . Следовательно, во второй стадии необходимо одновременно учитывать движение фронта плавления  $z(Fo)$  и фронта температурного возмущения  $\delta(Fo)$ . Математическая постановка задачи для данной стадии процесса теплообмена и плавления имеет вид (рис. 1)

$$\partial T(x, \tau) / \partial \tau = a \partial^2 T(x, \tau) / \partial x^2 ; \quad (\tau_{\text{пл}} \leq \tau \leq \tau^* ; \quad s(\tau) < x \leq \delta(\tau)) \quad (19)$$

$$T(x, 0) = T_{\text{н}}(x) ; \quad (20) \quad T(s, \tau) = T_{\text{пл}} ; \quad (21) \quad T(\delta, \tau) = T_0 ; \quad (22)$$

$$\frac{\partial T(\delta, \tau)}{\partial \tau} = 0 ; \quad (23) \quad F + \lambda \frac{\partial T(z, \tau)}{\partial x} - Q\rho \frac{dz(\tau)}{d\tau} = 0 , \quad (24)$$

где  $T_{\text{н}}(x)$  – начальное распределение температуры, определяемое из решения задачи в первой стадии процесса при  $Fo = Fo_{\text{пл}}$ .

Задача (19) – (24) в безразмерном виде будет

$$\partial \Theta(\xi, Fo) / \partial Fo = \partial^2 \Theta(\xi, Fo) / \partial \xi^2 ; \quad (Fo_{\text{пл}} \leq Fo \leq Fo^* ; \quad z(Fo) < \xi \leq \delta(Fo)) \quad (25)$$

$$\Theta(\xi, Fo_{\text{пл}}) = 0,5 Ki \delta(Fo_{\text{пл}}) (1 - \xi / \delta(Fo_{\text{пл}}))^2 ; \quad (26)$$

$$\Theta(z, Fo) = 1 ; \quad (27) \quad \Theta(\delta, Fo) = 0 ; \quad (28)$$

$$\partial \Theta(\delta, Fo) / \partial \xi = 0 ; \quad (29) \quad \partial \Theta(z, Fo) / \partial \xi - Po dz(Fo) / dFo + Ki = 0 , \quad (30)$$

где в качестве начального условия вида (26) принимается распределение температуры в конце первой стадии при  $Fo = Fo_{\text{пл}}$ , определяемое из соотношения (6).

Ввиду того что при  $Fo = Fo_{\text{пл}}$  математические постановки задач (1) – (4) и (25) – (30) полностью совпадают, то нет необходимости в специальном выполнении начального условия (26). Это условие будет выполнено в процессе получения решения задачи (25) – (30), в чем можно будет убедиться непосредственной подстановкой полученного решения в начальное условие (26).

Отсчет времени в задаче (25) – (30) ведется от  $Fo = Fo_{\text{пл}} = 0$ , то есть  $Fo_{\text{пл}}$  принимается за условный нуль начала плавления.

Решение задачи (25) – (30) принимается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(\delta, z) \xi^k , \quad (31)$$

где  $b_k(\delta, z)$  – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (27) – (29). После их нахождения соотношение (31) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = (\delta - \xi)^2 / (\delta - z)^2. \quad (32)$$

Температурное поле пластины согласно задаче (25) – (30) по координате  $\xi$  определено лишь в пределах двух фронтов  $z(Fo)$  и  $\delta(Fo)$ . Определив эти функции, из (32) можно найти распределение температуры в диапазоне  $z(Fo) \leq \xi \leq \delta(Fo)$  при  $Fo_{\text{пл}} \leq Fo \leq Fo^*$ . Для определения неизвестных функций  $z(Fo)$  и  $\delta(Fo)$  составим интеграл взвешенной невязки уравнения (25) в пределах от  $\xi = z(Fo)$  до  $\xi = \delta(Fo)$

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_z^{\delta} \Theta(\xi, Fo) d\xi = \int_z^{\delta} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (33)$$

Подставляя (32) в (33), после определения интегралов относительно неизвестных функций  $z(Fo)$  и  $\delta(Fo)$  получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$v(Fo)dv(Fo) = 6dFo, \quad (34)$$

где  $v(Fo) = \delta(Fo) - z(Fo)$ .

Интегрируя уравнение (34), находим

$$v^2/2 = 6Fo + C, \quad (35)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, определяемая из начального условия  $v(0) = \delta(0) - z(0)$ . Из (17) следует, что  $\delta(0) = \delta(Fo_{\text{пл}}) = 2/Ki$ . Тогда, учитывая, что  $z(0) = 0$ , из (35) находим  $C = 2/Ki^2$ .

С учетом найденного значения постоянной интегрирования из решения квадратного уравнения (35), принимаем положительный корень (величина  $v(Fo)$  по физическому смыслу не может быть отрицательной)

$$v(Fo) = \left(2\sqrt{3Ki^2Fo + 1}\right) / Ki. \quad (36)$$

Таким образом, решение для функции  $v(Fo) = \delta(Fo) - z(Fo)$  найдено в виде (36). Для того чтобы найти решение для каждой из функций  $\delta(Fo)$  и  $z(Fo)$  в отдельности, используем граничное условие (30). Подставляя (32) в (30), находим

$$Ki - 2/(\delta - z) - Po dz/dFo = 0. \quad (37)$$

Подставляя в (37) вместо  $(\delta - z)$  соотношение для  $v = \delta - z$  из (36), получаем

$$\frac{dz}{dFo} + \frac{Ki}{Po\sqrt{6Ki^2Fo + 1}} - \frac{Ki}{Po} = 0. \quad (38)$$

Интегрируя уравнение (38), будем иметь

$$z(Fo) = \left(3Ki^2Fo + 2 - 2\sqrt{3Ki^2Fo + 1}\right) / (3PoKi) + C, \quad (39)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, определяемая из начального условия  $z(0) = 0$ . Отсюда  $C = 0$ .

Подставляя (39) в (36), получаем

$$\delta(Fo) = \left(2\sqrt{3Ki^2Fo + 1}(3Po - 1) + 3KiFo + 2\right) / (3PoKi). \quad (40)$$

Таким образом, решения для функций  $z(Fo)$  и  $\delta(Fo)$  найдены в виде (39), (40). Распределение температуры по известным функциям  $z(Fo)$  и  $\delta(Fo)$  находится из (32). Непосредственной подстановкой можно убедиться, что начальное условие (26), граничные условия (27) – (30), а также интеграл теплового баланса (33), решением (32) удовлетворяются точно. Уравнение (25), как это следует из (33), удовлетворяется лишь в среднем.

Повышение точности решения связано с увеличением числа членов ряда (31). Для определения появляющихся при этом неизвестных коэффициентов  $b_k(\delta, z)$  необходимо ис-

пользовать дополнительные граничные условия. Метод их построения дан в [2, 3]. Отметим, что в каждом последующем приближении ко всем дополнительным граничным условиям предыдущих приближений необходимо добавлять еще два условия. Общие формулы для них имеют вид

$$\partial^n \Theta(\delta, Fo) / \partial \xi^n = 0; \quad \partial^{n+1} \Theta(\delta, Fo) / \partial \xi^{n+1} = 0. \quad (n = 2, 4, 6, 8, \dots) \quad (41)$$

Общая формула решения, удовлетворяющего основным (27) – (29) и всем дополнительным граничным условиям, для любого числа приближений записывается в виде следующего соотношения

$$\Theta(\xi, Fo) = k \frac{(\delta - \xi)^{2k}}{(\delta - z)^{2k}} - (k-1) \frac{(\delta - \xi)^{2k+1}}{(\delta - z)^{2k+1}}. \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (42)$$

Для получения решения во втором приближении дополнительные граничные условия согласно (41) будут

$$\partial^2 \Theta(\delta, Fo) / \partial \xi^2 = 0; \quad \partial^3 \Theta(\delta, Fo) / \partial \xi^3 = 0. \quad (43)$$

Решение во втором приближении, следуя (42), принимается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = 2 \frac{(\delta - \xi)^4}{(\delta - z)^4} - \frac{(\delta - \xi)^5}{(\delta - z)^5}. \quad (44)$$

Соотношение (44) удовлетворяет основным (27) – (29) и дополнительным (43) граничным условиям.

Из решения задачи во втором приближении необходимо найти неизвестные функции времени  $\delta(Fo)$  и  $z(Fo)$  соотношения (44). Для этого подставим (44) в интеграл теплового баланса (33). После определения интегралов будем иметь

$$7v(Fo)dv = 90dFo. \quad (45)$$

Интегрируя уравнение (45), находим

$$v(Fo) = \delta(Fo) - z(Fo) = \sqrt{2C + 180Fo/7}, \quad (46)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, определяемая из начального условия  $v(0) = \delta(0) - z(0)$ . Так как  $z(0) = 0$ , а  $\delta(0) = 10/(3Ki)$  (см. соотношение (18)), то  $v(0) = 10/(3Ki)$ .

С учетом найденного значения постоянной интегрирования соотношение (46) принимает вид

$$v(Fo) = 2\sqrt{35}\sqrt{81Ki^2Fo + 35}/(21Ki). \quad (47)$$

Для определения каждой из функций  $\delta(Fo)$  и  $z(Fo)$  в отдельности, подставим в (37) вместо  $\delta - z$  соотношение (47)

$$\frac{dz}{dFo} = \frac{10Ki(35 - 4,5\sqrt{113,4Ki^2Fo + 49} + 81Ki^2Fo)}{10Po(81Ki^2Fo + 35)}. \quad (48)$$

Интегрируя уравнение (48), при начальном условии  $z(0) = 0$  находим

$$z(Fo) = KiFo/Po - \left( \sqrt{113,4Ki^2Fo + 49} - 7 \right) / (9PoKi). \quad (49)$$

Подставляя (49) в (47), получаем

$$\delta(Fo) = \frac{KiFo}{Po} - \frac{\left( 7\sqrt{113,4Ki^2Fo + 49} - 49 - 6Po\sqrt{35}\sqrt{81FoKi^2 + 35} \right)}{63PoKi}. \quad (50)$$

Соотношения (44), (49), (50) представляют решение задачи (25) – (30) (вторая стадия процесса) во втором приближении. Результаты расчетов по формулам (44), (49), (50) даны на рис. 2 – 6.

После достижения фронтом температурного возмущения координаты  $\xi = 1$  ( $\delta(Fo^*) = 1$ ), начинается третья стадия процесса теплообмена и плавления, в которой понятие фронта тем-

пературного возмущения теряет смысл. На этой стадии необходимо определить зависимость фронта плавления от времени, а также распределение температуры на временном участке  $Fo_{пл} \leq Fo \leq Fo_k$ . Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид

$$\partial\Theta(\xi, Fo)/\partial Fo = \partial^2\Theta(\xi, Fo)/\partial\xi^2; \quad (Fo^* \leq Fo \leq Fo_k; \quad z(Fo) < \xi \leq 1) \quad (51)$$

$$\Theta(\xi, Fo^*) = (1-\xi)^2/(1-z(Fo^*))^2; \quad (52) \quad \Theta(z, Fo) = 1; \quad (53) \quad \Theta(1, Fo) = 0; \quad (54)$$

$$\partial\Theta(z, Fo)/\partial\xi - Po dz(Fo)/dFo + Ki = 0, \quad (55)$$

где в качестве начальной температуры, определяемой формулой (52), принимается распределение температуры в конце второй стадии процесса (см. формулу (44) при  $Fo = Fo^*$ ;  $z(Fo) = z(Fo^*)$ ;  $\delta(Fo^*) = 1$ ). В связи с тем, что при  $Fo = Fo^*$  математические постановки задач (25) – (30) и (51) – (55) совпадают, в специальном выполнении начального условия (52) нет необходимости – оно будет выполнено в процессе получения решения задачи (51) – (55).

Решение задачи (51) – (55) принимается в виде

$$\partial\Theta(\xi, Fo) = (1-\xi)^2/(1-z)^2. \quad (56)$$

Очевидно, что соотношение (56) удовлетворяет граничным условиям (53), (54) и начальному условию (52) (при  $z(Fo) = z(Fo^*)$ ).

Для определения неизвестной функции  $z(Fo)$  найдем интеграл взвешенной невязки уравнения (51) в пределах от  $\xi = z(Fo)$  до  $\xi = 1$

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_z^1 \Theta(\xi, Fo) d\xi = \int_z^1 \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (57)$$

Определяя интеграл в правой части соотношения (57), получаем

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_z^1 \Theta(\xi, Fo) d\xi = \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Theta(z, Fo)}{\partial \xi}. \quad (58)$$

Соотношение (58) с учетом (56) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_z^1 \Theta(\xi, Fo) d\xi = - \frac{\partial \Theta(z, Fo)}{\partial \xi}. \quad (59)$$

Выражая из (55)  $\partial\Theta(z, Fo)/\partial\xi$  и подставляя полученное соотношение в (59), находим

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_z^1 \Theta(\xi, Fo) d\xi = Ki - Po \frac{dz(Fo)}{dFo}. \quad (60)$$

Подставляя (56) в (60), относительно неизвестной функции  $z(Fo)$  получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left( Po - \frac{1}{3} \right) \frac{dz(Fo)}{dFo} = Ki. \quad (61)$$

Начальное условие для уравнения (61) находится из (39) при  $Fo = Fo^*$

$$z(Fo^*) = \left( 3Ki^2 Fo^* + 2 - 2\sqrt{3Ki^2 Fo^* + 1} \right) / (3KiPo). \quad (62)$$

Интегрируя уравнение (61), получаем

$$z(Fo) = KiFo / (Po - 1/3) + C, \quad (63)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, определяемая из начального условия (62). После её нахождения соотношение (63) принимает вид

$$z(Fo) = \frac{3Ki^2 Fo^* + 2 - 2\sqrt{3Ki^2 Fo^* + 1}}{3KiPo} - \frac{Ki(Fo - Fo^*)}{Po - 1/3}. \quad (64)$$

Соотношения (56), (64) определяют решение задачи (51) – (55) в первом приближении.

Для получения решения задачи (51) – (55) в последующих приближениях используется общая формула (42), где следует положить  $\delta(Fo) = 1$ . Решение задачи (51) – (55) во втором приближении приводится к виду

$$\Theta(\xi, Fo) = 2 \frac{(1-\xi)^4}{(1-z)^4} - \frac{(1-\xi)^5}{(1-z)^5}. \quad (65)$$

Подставляя (65) в интеграл теплового баланса (60), относительно неизвестной функции  $z(Fo)$  получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dz(Fo)/dFo = 30Ki/(30Po+23). \quad (66)$$

Интегрируя уравнение (66), находим

$$z(Fo) = C + 30KiFo/(30Po+23), \quad (67)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, определяемая из соотношения (49) при  $Fo = Fo^*$ , полученном во втором приближении второй стадии процесса. Формула для нее будет

$$C = \frac{FoKi}{Po} - \frac{\sqrt{2835Ki^2Fo + 1225 + 35}}{45KiPo} - \frac{30Fo^*Ki}{30Po + 23}. \quad (68)$$

Соотношения (65), (67), (68) представляют решение задачи (51) – (55) во втором приближении.

Результаты расчетов температуры по формулам (12), (44), (65) от момента начала нагрева и до окончания процесса плавления даны на рис. 2. Их анализ позволяет заключить, что при значениях  $Ki = 10$ ,  $Po = 5$  процесс плавления происходит за время  $Fo_k = 0,5908$ , если считать  $z(Fo_k) = 0,999$  отметим, что величина  $z(Fo_k) = 1$  в данном случае недостижима ввиду невозможности совмещения двух различных граничных условий первого рода вида (53), (54) в точке  $\xi = 1$ . В связи с чем фронт плавления может лишь асимптотически приближаться к точке  $\xi = 1$  (при  $Fo \rightarrow \infty$ ), никогда ее не достигая. Однако, если принять, что при  $z(Fo_k) = 0,999$  наступает практически полное расплавление вещества, то время расплавления будет вполне конечной величиной, равной  $Fo_k = 0,5908$ .

Результаты расчетов перемещения фронта температурного возмущения  $\delta(Fo)$  по координате  $\xi$  во времени  $Fo$  даны на рис. 3 ( $0 \leq Fo \leq Fo_{пл}$ ) и рис. 4 ( $Fo_{пл} \leq Fo \leq Fo^*$ ). Их анализ позволяет заключить, что с увеличением числа приближений скорость перемещения фронта температурного возмущения возрастает. Этот факт объясняется тем обстоятельством, что решению подлежит параболическое уравнение (1), в котором заложена бесконечная скорость распространения теплового возмущения. Поэтому ускорение перемещения фронта температурного возмущения с увеличением числа приближений свидетельствует о повышении точности получаемого на первой стадии решения [2, 4].

Результаты расчетов перемещения фронта плавления  $z(Fo)$  по координате  $\xi$  во времени  $Fo$  приведены на рис. 5 ( $Fo_{пл} \leq Fo \leq Fo^*$ ) и рис. 6 ( $Fo^* \leq Fo \leq Fo_k$ ). Их анализ позволяет заключить, что на временном участке  $0 \leq Fo \leq 0,066$ , закон перемещения фронта плавления отличается от линейного, а на участке  $0,066 \leq Fo \leq Fo_k = 0,5908$  он становится практически линейным. Отметим, что указанные временные диапазоны наблюдаются лишь при  $Ki = 10$ ,  $Po = 5$ . Для любых других сочетаний чисел Кирпичева и Померанцева эти диапазоны будут изменяться.

Как показали расчеты, закономерность перемещения фронта плавления практически не зависит от числа приближений. Такой результат объясняется тем, что движение фронта плавления описывается уравнением (30), которое в любом приближении выполняется точно.



## Обозначения

$\Theta = (T - T_0) / (T_{пл} - T_0)$  – безразмерная температура;  $\xi = x/R$  – безразмерная координата;  $Fo = a\tau / R^2$  – число Фурье;  $Ki = FR / (\lambda(T_{пл} - T_0))$  – критерий Кирпичева;  $Po = Q\rho a / (\lambda(T_{пл} - T_0))$  – критерий Померанцева;  $T_0$  – начальная температура;  $T_{пл}$  – температура плавления;  $R$  – толщина пластины;  $\tau$  – время;  $x$  – координата;  $a$  – коэффициент температуропроводности;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $F$  – тепловой поток;  $Q$  – теплота плавления;  $\rho$  – плотность;  $Fo_{пл}$  – время достижения поверхностью пластины ( $\xi = 0$ ) температуры плавления;  $Fo^*$  – время достижения фронтом температурного возмущения координаты  $\xi = 1$ ;  $Fo_k$  – время окончания плавления (время при котором фронт плавления достигает координаты  $\xi = 0,999$ );  $\delta(\tau), \delta(Fo)$  – функции, характеризующие перемещение фронта температурного возмущения по пространственной переменной во времени;  $s(\tau)$  – функция, характеризующая перемещение фронта плавления по координате  $x$  во времени;  $z(Fo) = s(\tau) / R$  – безразмерная величина фронта плавления.

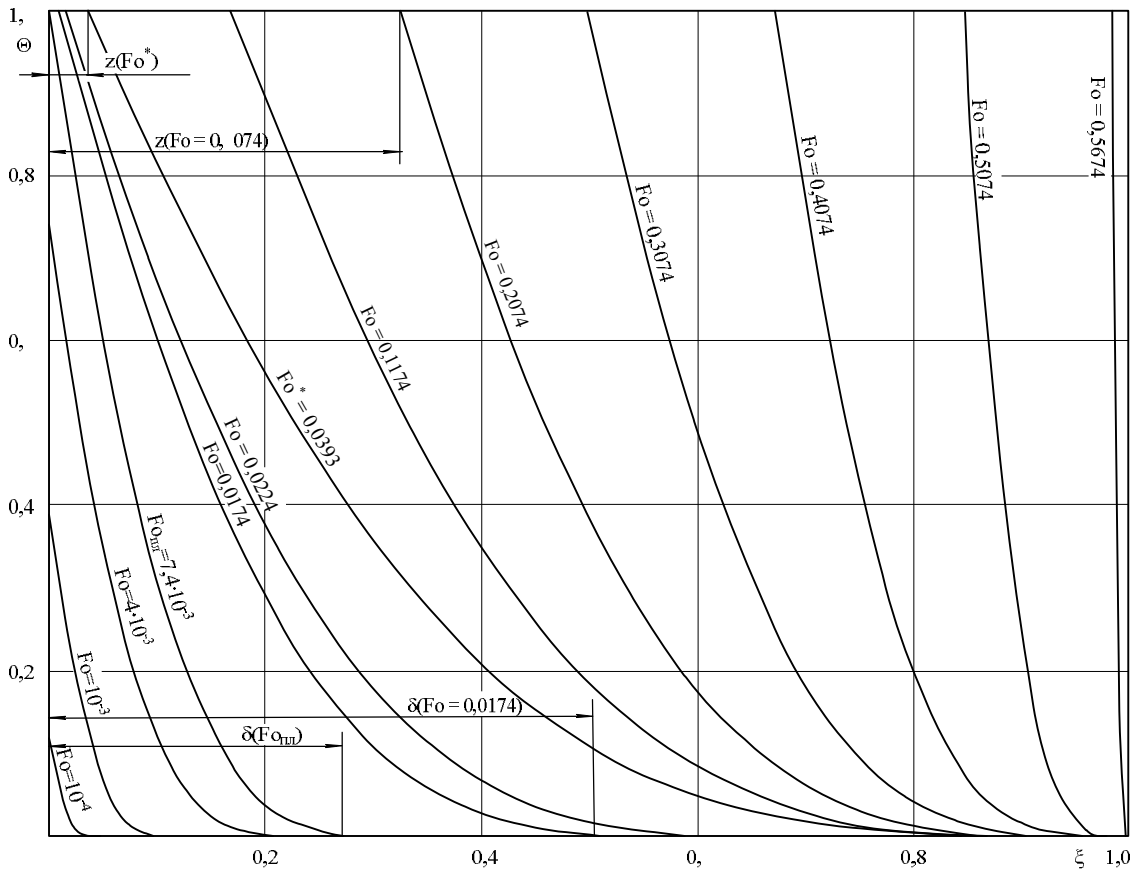


Рис. 2. Распределение температуры пластине в процессе ее прогрева и плавления (второе приближение).  $Ki = 10$ ,  $Po = 5$ .  $(0 \leq Fo \leq Fo_{пл})$  – первая стадия;  $(Fo_{пл} \leq Fo \leq Fo^*)$  – вторая стадия;  $(Fo^* \leq Fo \leq Fo_k)$  – третья стадия ( $Fo_k = 0,5962$ )

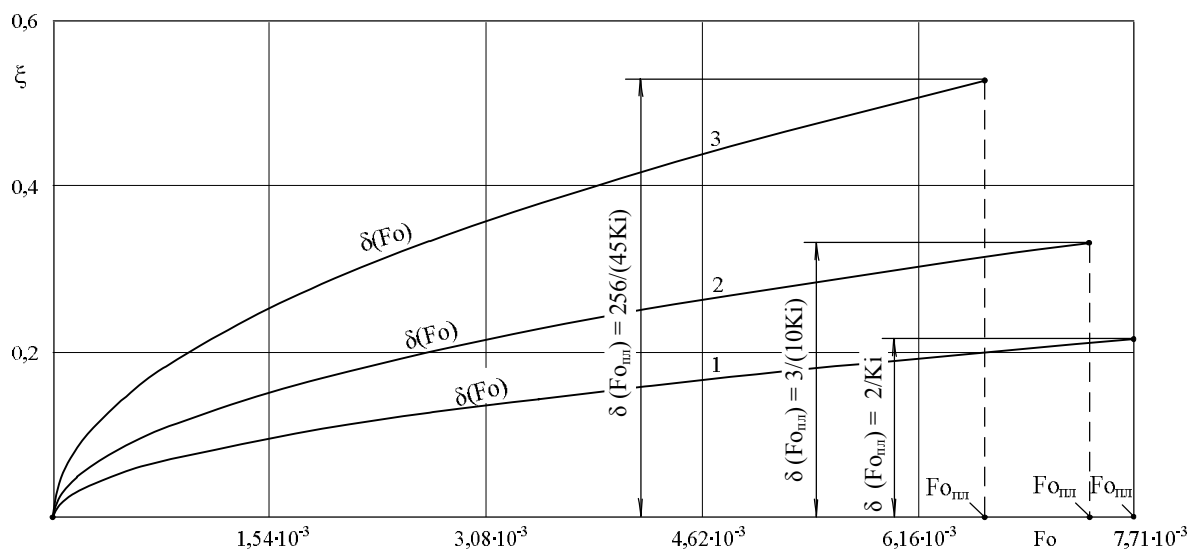


Рис. 3. Перемещение фронта температурного возмущения  $\delta(Fo)$  по координате  $\xi$  во времени  $Fo$  до момента начала плавления (первая стадия процесса,  $0 \leq Fo \leq Fo_{nl}$ ).  $Ki = 10$ ,  $Ro = 5$ . 1, 2, 3 – соответственно первое, второе и пятое приближения

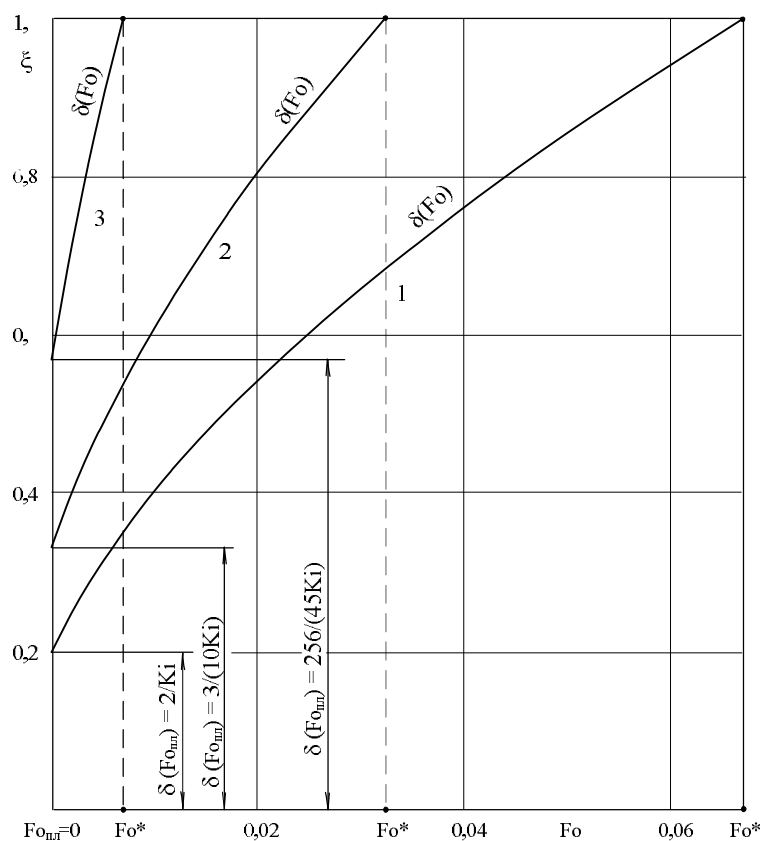


Рис. 4. Перемещение фронта температурного возмущения  $\delta(Fo)$  по координате  $\xi$  во времени  $Fo$  (вторая стадия процесса,  $Fo_{nl} \leq Fo \leq Fo^*$ ,  $Fo_{nl} = 0$ ).  $Ki = 10$ ,  $Ro = 5$ . 1, 2, 3 – соответственно первое, второе и пятое приближения

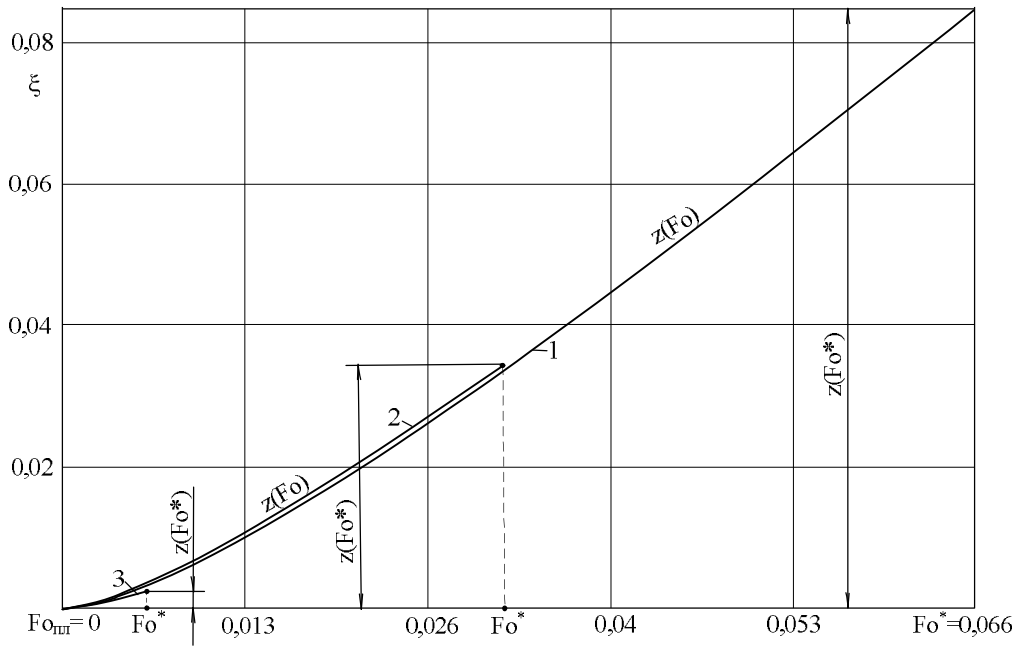


Рис. 5. Перемещение фронта плавления  $z(Fo)$  по координате  $\xi$  во времени  $Fo$  (вторая стадия процесса). ( $Fo_{пл} \leq Fo \leq Fo^*$ ,  $Fo_{пл} = 0$ ).  $Ki = 10$ ,  $Ro = 5$ .  
1, 2, 3 – соответственно первое, второе и пятое приближения

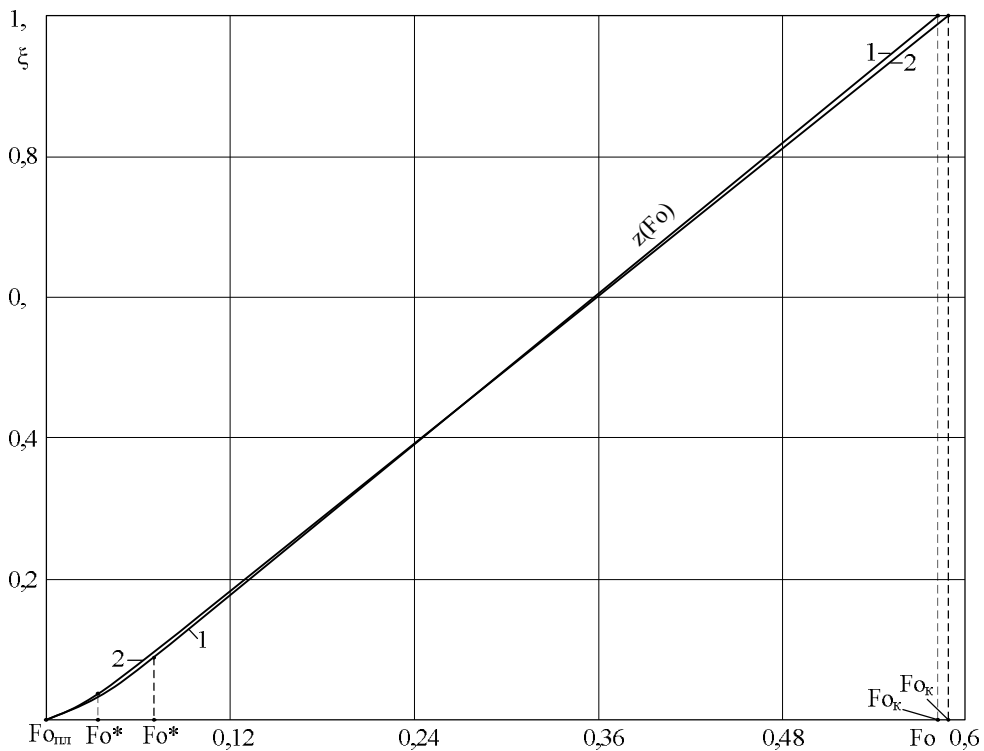


Рис. 6. Перемещение фронта плавления  $z(Fo)$  по координате  $\xi$  во времени  $Fo$  (вторая ( $Fo_{пл} \leq Fo \leq Fo^*$ ) и третья ( $Fo^* \leq Fo \leq Fo_k$ ) стадии процесса,  $Fo_{пл} = 0$ ).  
 $Ki = 10$ ,  $Ro = 5$ . 1, 2 – соответственно первое и второе приближения

## Литература

1. Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена. Сб. научн. тр. М.: Атомиздат, 1967. С. 41 – 96.
2. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 280 с.
3. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Стефанюк Е.В. Техническая термодинамика и теплопередача. М.: Издательство Юрайт, 2011. 560 с.
4. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Математическое моделирование процессов теплообмена и фазовых превращений с учетом абляции. Инженерно-физический журнал. Т. 84. № 5, 2011. С. 1065 – 1074
5. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1979. 328 с.
6. Глазунов Ю.Т. Вариационные методы. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. 470 с.