

## РЕГИОНАЛЬНО-СТРУКТУРНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

**Ю. М. Мацевитый, А. П. Слесаренко**

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков,  
Украина E-mail: [matsevit@ipmach.kharkov.ua](mailto:matsevit@ipmach.kharkov.ua)*

Предлагается регионально-структурная регуляризация решения многопараметрической обратной задачи теплопроводности (МОЗТ), которая осуществляется в следующей последовательности. Первый этап: распараллеливание аналитической информации о граничных условиях при построении регуляризирующих алгоритмов решения МОЗТ. Второй этап: региональное распараллеливание функциональных элементов аппроксимации в регуляризирующих алгоритмах решения МОЗТ, которое состоит в регионально-аналитической аппроксимации искомой функции с „покрытием” региональных приграничных областей соседних регионов. Третий этап: распараллеливание аналитической информации о функциональных зависимостях идентифицируемых региональных граничных параметров (тепловой поток, температура внешней среды, коэффициенты теплоотдачи на участках границы области) от координат.

Для того чтобы получить идентифицируемые зависимости с достаточно высокой точностью, участок границы разбивается последовательно на два, три, четыре и т. д. участков, на каждом из которых идентифицируемая зависимость задаётся в виде полинома второй степени по дуговой координате с тремя неизвестными коэффициентами. В этом случае решение прямой задачи теплопроводности с неизвестными коэффициентами в региональных граничных условиях сводится к решению серии задач по определению спектральных функций влияния граничных воздействий [1]. Заданное минимальное значение нормы разности двух соседних приближений при оценке степени достоверности двух соседних идентифицированных приближений является критерием остановки итерационного процесса при увеличении региональных участков границы области той части границы, на которой идентифицируются указанные выше зависимости с помощью метода наименьших квадратов и данных теплофизического или вычислительного эксперимента.

Рассмотрим схему регионально-структурной регуляризации решения МОЗТ на примере решения ОЗТ [2].

$$\frac{\partial T_k}{\partial \mathbf{Fo}} = \Delta T_k, \quad T_k = T_k(x, y, \mathbf{Fo}), \quad (x, y) \in \bigcup_{k=1}^7 \Omega_k, \quad (1)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial T_k}{\partial n} \right|_{\Gamma_i} = q_i, \quad i = \overline{1,6}, \quad T_k|_{\Gamma_i} = 0, \quad i = 7,8, \quad (2)$$

$$T_k|_{\Gamma_{k,i}} = T_{k+1}|_{\Gamma_{k,i+1}}, \quad \left. \frac{\partial T_k}{\partial x} \right|_{\Gamma_{k,i}} = \left. \frac{\partial T_{k+1}}{\partial x} \right|_{\Gamma_{k,i+1}}, \quad i = \overline{1,6}, k = \overline{1,6}, \quad (4)$$

$$T_k(x, y, 0) = T_k^*(x, y), \quad (5)$$

$$T_k(x_{m,k}, y_{m,k}, \mathbf{Fo}_l) = T_l(x_{m,k}, y_{m,k}, \mathbf{Fo}_l), \quad (6)$$

для области  $\Omega = \bigcup_{k=1}^7 \Omega_k$ , представленной на рисунке.

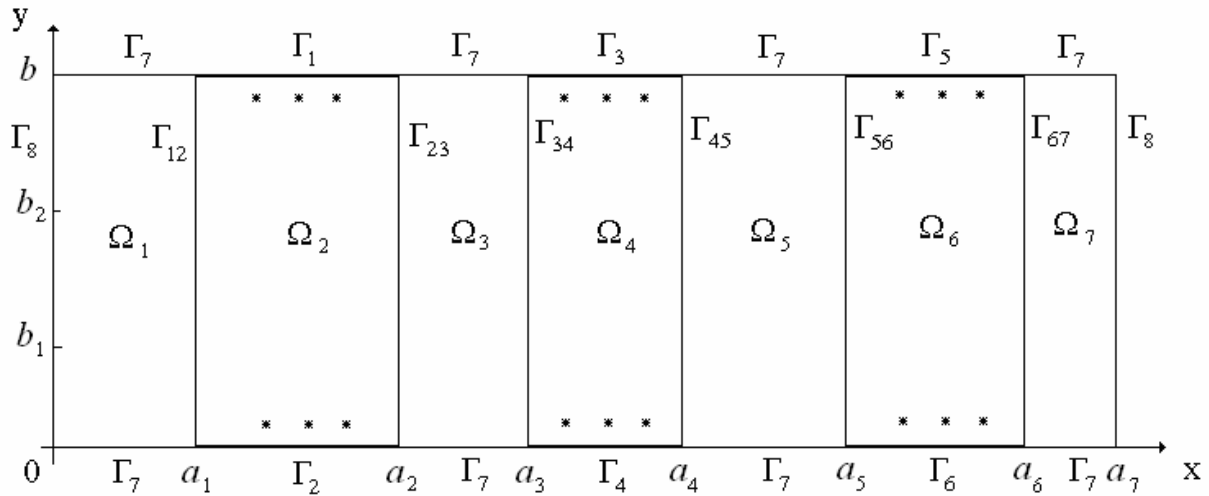


Рис 1. Разбиение на регионы области решения краевой задачи: звёздочками отмечены точки наблюдения.

Для задачи (1)-(6)  $k$  – номер региона,  $\lambda$  – теплопроводность среды, заполняющей область  $\Omega$ ,  $q_i(x)$  – неизвестные тепловые потоки,  $T_3(x_{m,k}, y_{m,k}, Fo_l)$  – заданные значения температур, полученных в результате теплофизического или вычислительного эксперимента во внутренних точках  $(x_m, y_m)$  области  $\Omega$ .

Применяя метод прямых, сведём задачу (1)-(6) к последовательности стационарных МОЗТ

$$\Delta T_{k,l} - \frac{T_{k,l}}{\Delta Fo} = -\frac{T_{k,l-1}}{\Delta Fo}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_{kl}}{\partial y} \Big|_{\Gamma_k} = q_{kl}^*, \quad k = \overline{1,6}, \quad q_{kl}^* = q\lambda^{-1}, \quad T_{kl} \Big|_{\Gamma_k} = 0, \quad k = \overline{7,8}; \quad (8)$$

$$T_{k,l} \Big|_{\Gamma_{k,i}} = T_{k+1,l} \Big|_{\Gamma_{k,i+1}}, \quad \frac{\partial T_{k,l}}{\partial x} \Big|_{\Gamma_{k,i}} = \frac{\partial T_{k+1,l}}{\partial x} \Big|_{\Gamma_{k,i+1}}, \quad i = \overline{1,6}, \quad k = \overline{1,6}; \quad (9)$$

$$T(x_m, y_m, Fo_l) = T(x, y, Fo_l). \quad (10)$$

Построим регионально-аналитическую структуру решения ОЗТ (7)-(10) с учётом результатов, полученных в работах [1-4], в виде:

$$T_{1l} = \omega_1 \Phi_1^{(l)}, \quad T_{3l} = \omega_3 \Phi_3^{(l)}, \quad T_{5l} = \omega_5 \Phi_5^{(l)}, \quad T_{7l} = \omega_7 \Phi_7^{(l)}, \quad (11)$$

где  $T_k = T_k(x, y, C_{ij}^{(k)})$ ;  $\omega_1 = xy(b-y)$ ,  $\omega_3 = y(b-y)$ ,  $\omega_5 = y(b-y)$ ,  $\omega_7 = y(b-y)(a_7-x)$ ,  $\Phi_k^{(l)}(x, y, C_{ij}^{(kl)}) = \sum_{ij} C_{ij}^{(kl)} P_i^{(k)}(x) P_j^{(k)}(y)$ ,  $P_i^{(k)}(x), P_j^{(k)}(y)$  – полиномы Чебышева. Последние полиномы нормированы в регионах:  $P_j^{(k)}(y)$  – в регионе  $0 \leq y \leq b$ ,  $P_i^{(k)}(x)$  – в регионе  $0 \leq x \leq a_2$  для  $k=1$ , в регионе  $a_1 \leq x \leq a_4$  для  $k=3$ , в регионе  $a_3 \leq x \leq a_6$  для  $k=5$ , в регионе  $a_5 \leq x \leq a_7$  для  $k=7$ .

Для функций  $T_{k,l}$  ( $k = 2,4,6$ ) получим

$$T_{2l} = \frac{\frac{T_{1l}}{\omega_{12}^2} + \frac{T_{3l}}{\omega_{23}^2} + \frac{T_{11l}}{\omega_{17}^2} + \frac{T_{22l}}{\omega_{27}^2}}{\frac{1}{\omega_{12}^2} + \frac{1}{\omega_{23}^2} + \frac{1}{\omega_{17}^2} + \frac{1}{\omega_{27}^2}}, T_{4l} = \frac{\frac{T_{3l}}{\omega_{34}^2} + \frac{T_{5l}}{\omega_{45}^2} + \frac{T_{33l}}{\omega_{17}^2} + \frac{T_{44l}}{\omega_{27}^2}}{\frac{1}{\omega_{34}^2} + \frac{1}{\omega_{45}^2} + \frac{1}{\omega_{17}^2} + \frac{1}{\omega_{27}^2}}, T_{6l} = \frac{\frac{T_{5l}}{\omega_{56}^2} + \frac{T_{7l}}{\omega_{67}^2} + \frac{T_{55l}}{\omega_{17}^2} + \frac{T_{66l}}{\omega_{27}^2}}{\frac{1}{\omega_{56}^2} + \frac{1}{\omega_{67}^2} + \frac{1}{\omega_{17}^2} + \frac{1}{\omega_{27}^2}}, \quad (12)$$

где  $\omega_{12} = x - a_1$ ,  $\omega_{23} = a_2 - x$ ,  $\omega_{34} = x - a_3$ ,  $\omega_{45} = a_4 - x$ ,  $\omega_{56} = x - a_5$ ,  $\omega_{67} = a_6 - x$ ,  $\omega_{17} = b - y$ ,

$$\omega_{27} = y; T_{11l} = \omega_{17}q_1^* + \Phi_2^{(l)} + \omega_{17} \frac{\partial \Phi_2^{(l)}}{\partial y} \Big|_{y=1}, T_{22l} = \omega_{27}q_2^* + \Phi_2^{(l)} - \omega_{27} \frac{\partial \Phi_2^{(l)}}{\partial y} \Big|_{y=0},$$

$$T_{33l} = \omega_{17}q_3^* + \Phi_4^{(l)} + \omega_{17} \frac{\partial \Phi_4^{(l)}}{\partial y} \Big|_{y=1}, T_{44l} = \omega_{27}q_4^* + \Phi_4^{(l)} - \omega_{27} \frac{\partial \Phi_4^{(l)}}{\partial y} \Big|_{y=0},$$

$$T_{55l} = \omega_{17}q_5^* + \Phi_6^{(l)} + \omega_{17} \frac{\partial \Phi_6^{(l)}}{\partial y} \Big|_{y=1}, T_{66l} = \omega_{27}q_6^* + \Phi_6^{(l)} - \omega_{27} \frac{\partial \Phi_6^{(l)}}{\partial y} \Big|_{y=0}; \Phi_k^{(l)} = \sum_{ij} C_{ij}^{(k)} P_i^{(k)}(x) P_j^{(k)}(y)$$

для  $k = 2,4,6$ .

Распараллеливание аппроксимации решения задачи в регионах заключается в представлении региональных полиномов Чебышева в соответствующих регионах в виде  $P_j^{(k)}(y) = (y + d_1)P_{1j}^{(k)}(y) + (y + d_2)P_{2j}^{(k)}(y)$ , где  $P_{1j}^{(k)}(y)$  – полиномы Чебышева, нормированные в регионе  $0 \leq y \leq b_2$ , а  $P_{2j}^{(k)}(y)$  – полиномы Чебышева, нормированные в регионе  $b_1 \leq y \leq b$ . Из условий „сопряжения” на границах контакта регионов полиномов Чебышева  $P_{1j}^{(k)}(b_1) = P_j^{(k)}(b_1)$ ,  $P_{2j}^{(k)}(b_2) = P_j^{(k)}(b_2)$  получим, что  $d_1 = -b_2$ ,  $d_2 = -b_1$ .

В представленных выше регионально-аналитических структурах решения МОЗТ границы  $\Gamma_k$  регионов  $\Omega_k$  области  $\Omega$  могут быть любой заданной формы. В этом случае уравнения участков региональных границ  $\Gamma_k$  области  $\Omega$  могут быть получены с помощью полной системы S-функций (smooth-функций), позволяющих строить непрерывно дифференцируемые функции  $\omega_k$ , описывающие с любой заданной степенью точности границы областей сложной формы [5]. Для региональных структур решения МОЗТ (11)-(12) функции  $\omega_k$  строятся так, чтобы они удовлетворяли условиям  $\omega_k|_{\Gamma_k} = 0$ ,  $\omega_k > 0$  при

$$(x, y) \in \Omega_k, \frac{\partial \omega_k}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\Gamma_k} = 1, \text{ где } \mathbf{v} \text{ – внешняя нормаль к контуру } \Gamma_k,$$

Используя подход, описанный выше, получим региональные решения прямых задач в виде  $T_{kl} = T_{0kl} + \sum_{i=1}^{m_k} \gamma_{ikl} T_{ikl}$ , где  $T_{0kl}$  – полученные решения при известных региональных граничных условиях, а  $\gamma_{ikl}$  – искомые параметры. Определение искомых параметров сводится к минимизации функционалов

$$I_l = \sum_{i,k=1}^m (T_{kl}(M_i) - T_{\varepsilon kl}(M_i))^2 \quad (13)$$

в моменты времени  $\Gamma_0$ , где  $T_{\varepsilon kl}$  – данные вычислительного эксперимента.

Что касается определения плотности теплового потока на участках границы области, то здесь можно воспользоваться регуляризирующим алгоритмом Тихонова А. Н [6]. В этом случае параметр регуляризации в соответствующем функционале выбирается так, чтобы выполнялись двусторонние неравенства, предложенные в работе [7].

Качественной особенностью регионально-структурного подхода при разбиении области сложной формы на сравнительно простые регионы является возможность более корректно учесть региональную геометрию области, места расположения точек наблюдения и аппроксимировать решения прямой и обратной задач теплопроводности полиномами более низких степеней. Региональные спектральные функции влияния так же, как и сплайны по отношению к полиномам в задачах о приближении функций, являются более естественным аппаратом при решении ОЗТ, чем спектральные функции влияния для всей рассматриваемой области.

В конкретных прикладных задачах появляется возможность использовать небольшое число математических параметров (коэффициентов спектральных функций влияния, геометрических параметров и т. п.), что позволяет наиболее эффективно в соответствии с теоремой А. Н. Тихонова [6] решать некорректно поставленные задачи.

Регионально-аналитическая идентификация тепловых потоков на поверхностях конструктивных элементов особенно важна при решении МОЗТ, т. к. идентифицируемые зависимости для региональных тепловых потоков получаются в виде регионально-аналитических функций пространственных координат. Это открывает большие возможности для параметрического анализа теплового состояния исследуемых объектов и решения задач управления тепловыми процессами.

Таким образом в предлагаемом подходе к решению некорректно поставленных задач удаётся, разбивая область на регионы и получая в каждом регионе достаточно точное „загрублённое” устойчивое решение (компакт), устранить традиционное противоречие между точностью и устойчивостью получаемых решений.

Региональные структуры решения нелинейных нестационарных задач теплопроводности имеют «модульную» структуру аналитических решений. Это означает, что, не меняя структуру аналитической конструкции решения, становится возможным изменять как функциональные зависимости от координат и времени теплофизических характеристик среды, коэффициентов теплоотдачи и температуры окружающей среды, так и региональные геометрические параметры области исследования, а также региональные полные системы аппроксимирующих функций, входящих в аналитические конструкции региональных решений прямых и обратных задач теплопроводности в качестве «модульных» элементов.

Регионально-аналитическая структура решений задач теплопроводности позволяет в модульном варианте включать в неё спектральные функции влияния граничных воздействий, что даёт возможность получать спектральную регионально-аналитическую информацию о тепловых процессах в элементах конструкций. Функциональные зависимости коэффициентов при базисных функциях от коэффициента теплоотдачи и температуры окружающей среды позволяет определять в реальном масштабе времени (т. е. значительно быстрее, чем с помощью численных методов) тепловое состояние элементов конструкций в различных рабочих и экстремальных режимах их эксплуатации, что обеспечивает более эффективное проведение экспресс-анализа и экспресс-прогноза надёжности работы систем и интерактивное управление тепловыми нагрузками в условиях скоростного теплообмена с интенсивными импульсными тепловыми воздействиями.

Для реальных физических процессов в каждый момент времени потенциальная энергия системы ограничена, т. е. должны отсутствовать сингулярные особенности в решениях соответствующих краевых задач. Это означает, что аналитические региональные структуры решений должны быть непрерывны и иметь непрерывные частные производные. В этом случае региональные структуры решения задач теплопроводности становятся консервативными.

Вторая качественная особенность регионально-структурного метода по сравнению с существующими приближёнными аналитическими методами решения задач

теплопроводности состоит в распараллеливании аналитической и геометрической информации для исходной математической модели теплового процесса.

Это даёт возможность:

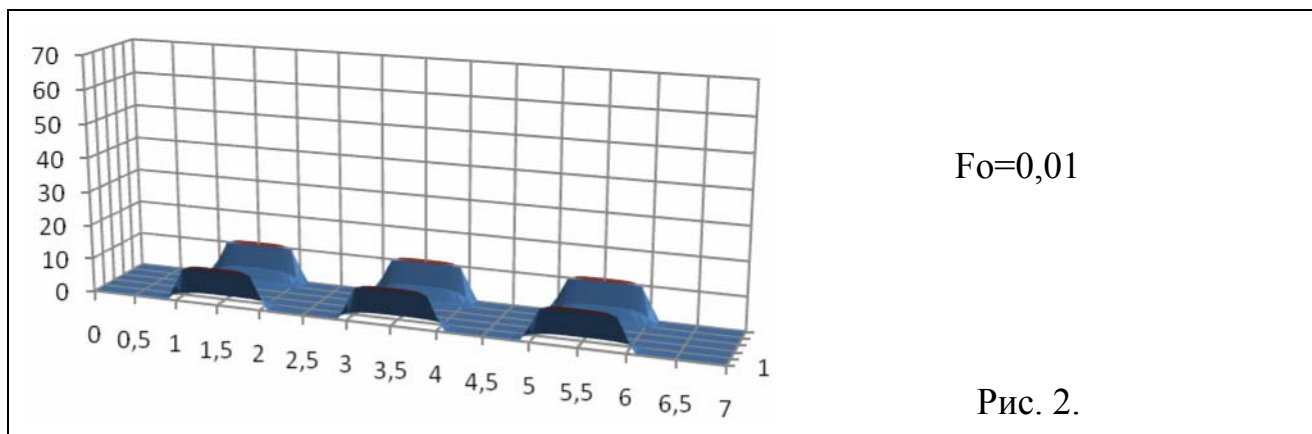
- избежать «фиктивных» паразитных связей между региональными граничными воздействиями;
- перейти к построению более простых региональных структур решений с учётом региональных геометрических особенностей и характера региональных граничных условий;
- для областей с неоднородными средами строить региональные структуры решений так, чтобы границы контакта разнородных сред совпадали с участками границ регионов;
- построить ограниченные функционалы для соответствующих вариационных задач с помощью региональных структур решений задач теплопроводности, обладающих свойствами региональной консервативности.

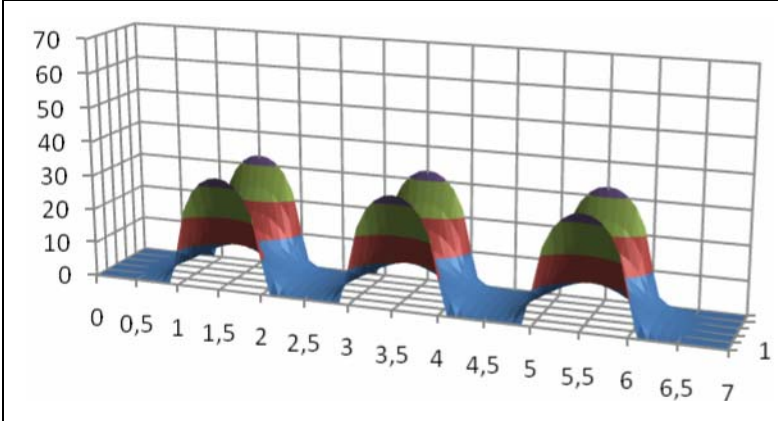
Третья качественная особенность регионально-структурного метода состоит в построении региональных базисных функций подобно тому, как это делается при сплайн-идентификации [8].

Четвёртая качественная особенность регионально-структурного метода эффективно появляющаяся при регионально-структурной регуляризации решений МОЗТ, заключается в том, что идентификация функциональных зависимостей от координат региональных тепловых потоков, коэффициентов теплоотдачи и температуры окружающей среды с использованием данных вычислительного эксперимента (ВЭ) или теплофизического эксперимента (ТФЭ) сводится к итерационному процессу граничной региональной идентификации с построением граничных региональных спектральных функций для идентифицируемых параметров. Итерационный процесс разбиения участков границы на региональные участки при идентификации указанных параметров останавливается по достижению заданной погрешности максимального модуля разности двух соседних приближений идентифицируемых на границе тепловых потоков, коэффициентов теплоотдачи и температуры окружающей среды.

Для иллюстрации эффективности применения регионально-структурного метода к решению прямых и обратных задач теплопроводности и проверки эффективности регионально-структурной регуляризации МОЗТ приведём данные проведенного вычислительного эксперимента.

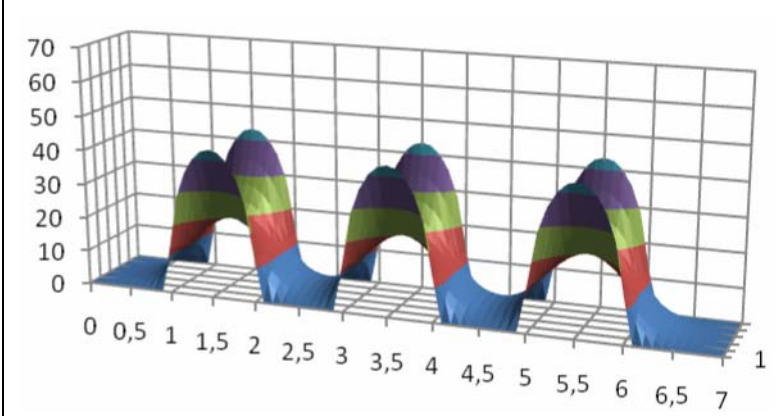
Результаты решения прямой задачи теплопроводности (1)-(5) для области (рис. 1.) в безразмерных координатах, где  $a_k = x_k L^{-1}$ , при  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 3$ ,  $a_4 = 4$ ,  $a_5 = 5$ ,  $a_6 = 6$ ,  $a_7 = 7$ ,  $b = 1$ ,  $q_k^* = -100 \frac{\text{град}}{\text{м}}$ ,  $k = 1,6$  для безразмерной температуры  $\Theta = \frac{T(x, y, Fo)\lambda}{qL}$  при  $Fo = 0,01; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$  представлены на рис. 2-7.





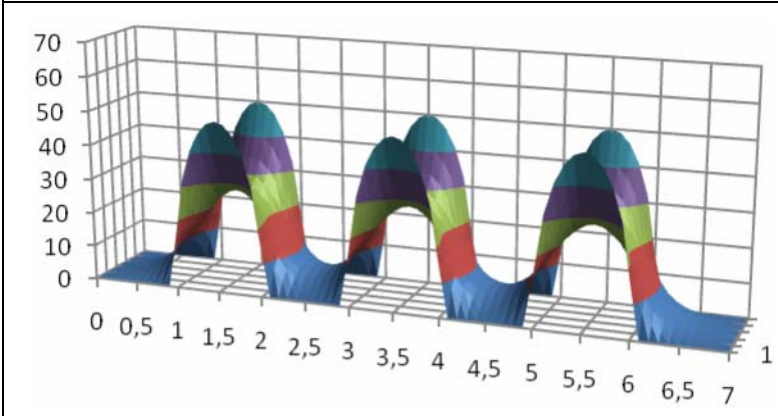
$Fo=0,1$

Рис. 3.



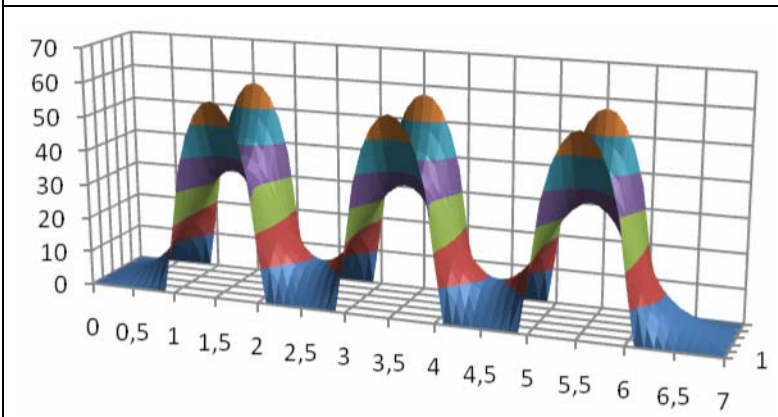
$Fo=0,2$

Рис. 4.



$Fo=0,3$

Рис. 5.



$Fo=0,5$

Рис. 6.

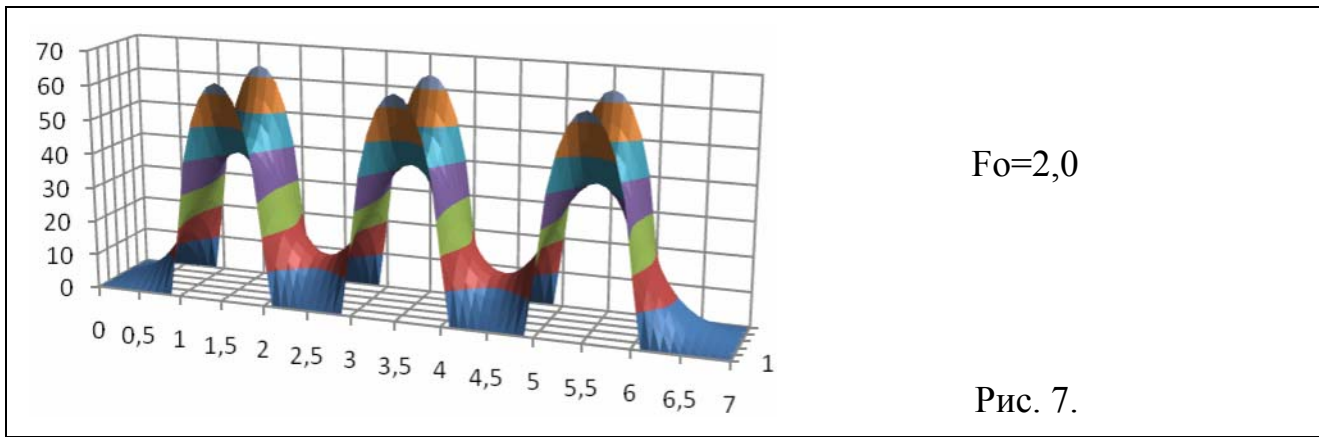


Рис. 7.

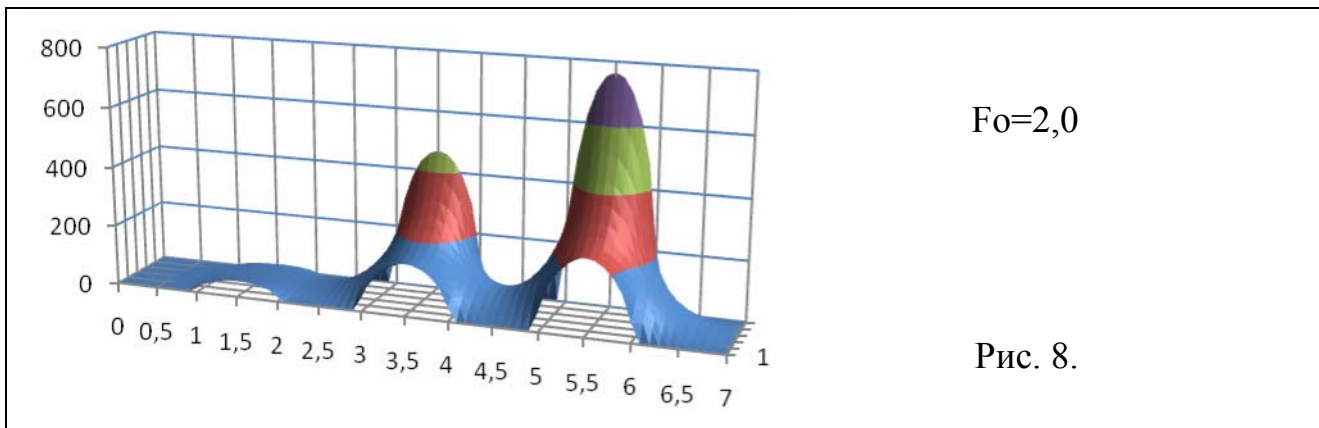


Рис. 8.

Синтез разностных схем прямых и обратных задач теплопроводности, полученных с использованием конечных разностей второго порядка по временной переменной, конечных разностей четвертого порядка по координатам и регионально-аналитических структур (11)-(12) решения задач теплопроводности, позволил получить региональные структурно-разностные схемы.

При этом для семи региональных функций  $\Phi_k = \sum_{i+j=0}^6 C_{ij}^k P_i(x) P_j(y)$ , входящих в региональные структуры решения (11), (12) было взято по 28 членов в каждом региональном функциональном ряде.

Вычислительный эксперимент проводился для 15, 21 и 28 региональных базисных функций в каждом регионе.

Устойчивость вычислительного процесса в этом случае аналогична устойчивости вычислительных процессов при использовании сплайн-аппроксимации для решения краевых задач.

При решении обратной задачи теплопроводности использовались данные из вычислительного эксперимента для момента времени  $Fo = 2,0$ . В таблице представлены результаты решения модельной задачи и идентифицированные значения параметров  $q_k^*$ , характеризующих плотность теплового потока на участках границ  $\Gamma_k$ ,  $k = \overline{1,6}$ , где  $k$  – номер регионального участка границы, а  $\delta$  – относительная погрешность результата.

$k$	1	2	3	4	5	6
$q_{точ}^*$	-100	-10	-120	-900	140	1500
$q_{идент}^*$	-103,01	-11,35	-118,96	-880,98	137,19	1476,04
$\delta, \%$	3,01%	1,35%	0,86%	2,11%	2,01%	1,59%

На рис. 8. для безразмерной температуры  $\Theta$  и численных значений для плотностей тепловых потоков (таблица) на участках границ  $\Gamma_k$ ,  $k = \overline{1,6}$  представлены результаты решения задачи теплопроводности (1)-(5).

Рассмотрим пример построения спектральных региональных функций влияния граничных воздействий.

Пусть для участка границы  $\Gamma_2$  (рис. 1.)  $q_2^* = q_2(x)$ . Тогда на первой итерации идентификации теплового потока представим  $q_2^*(x)$  в виде  $q_2^*(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ . На второй итерации граничный участок  $[a_1, a_2]$  разобьём на три равные участка  $[a_1, a_{11}]$ ,  $[a_{11}, a_{12}]$ ,  $[a_{12}, a_2]$ . Для отрезка  $[a_1, a_{11}]$   $q_2^*(x)$  представим в виде  $q_2^*(x) = c_0^{(1)} + c_1^{(1)}x + c_2^{(1)}x^2 = f_{12}$ , для отрезка  $[a_{12}, a_2]$  – в виде  $q_2^*(x) = c_0^{(3)} + c_1^{(3)}x + c_2^{(3)}x^2 = f_{32}$ . Для отрезка  $[a_{11}, a_{12}]$  – в виде  $q_2^*(x) = f_{12}(x) \frac{\omega_{12}^2}{\omega_{11}^2 + \omega_{12}^2} + f_{32} \frac{\omega_{11}^2}{\omega_{11}^2 + \omega_{12}^2}$ , где  $\omega_{11}^2 = (x - a_{11})^2$ ,  $\omega_{12}^2 = (x - a_{12})^2$ .

На третьей итерации граничный участок  $[a_1, a_2]$  разбивается на пять равных участков  $[a_1, a_{11}]$ ,  $[a_{11}, a_{12}]$ ,  $[a_{12}, a_{13}]$ ,  $[a_{13}, a_{14}]$ ,  $[a_{14}, a_2]$ . Для отрезков  $[a_1, a_{11}]$  и  $[a_{11}, a_{12}]$   $q_2^*(x)$  представим в таком же виде, как и на второй итерации. Для отрезка  $[a_{12}, a_{13}]$   $q_2^*(x)$

представим в виде  $q_2^*(x) = f_{23}(x) \frac{\omega_{12}^2}{\omega_{13}^2 + \omega_{12}^2} + f_{34} \frac{\omega_{13}^2}{\omega_{13}^2 + \omega_{12}^2}$ , для отрезка  $[a_{13}, a_{14}]$  – в виде

$q_2^*(x) = f_{34}(x) \frac{\omega_{13}^2}{\omega_{13}^2 + \omega_{14}^2} + f_{45} \frac{\omega_{14}^2}{\omega_{13}^2 + \omega_{14}^2}$ , для отрезка  $[a_{14}, a_2]$  – в виде

$q_2^*(x) = f_{45} = c_0^{(5)} + c_1^{(5)}x + c_2^{(5)}x^2$ . Здесь  $f_{34}(x) = c_0^{(4)} + c_1^{(4)}x + c_2^{(4)}x^2$ ,  $\omega_{13}^2 = (x - a_{13})^2$ ,  $\omega_{14}^2 = (x - a_{14})^2$ .

Критерием остановки итерационного процесса регуляризации решений МОЗТ при идентификации тепловых потоков на участках границ области, функционально зависящих от дуговой координаты, является заданная погрешность нормы разности двух соседних функциональных приближений для идентифицируемых потоков.

## Литература

1. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П., Цаканян О. С. Идентификация граничных тепловых воздействий с помощью спектральных функций // Инж.-физ. журн. – 1987. – 53, № 3. – С. 480-486.
2. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности. В 2-х т. Киев: Наукова думка, Т. 1. Методология. 2002. – 408 с., Т. 2. Приложения. 2003. – 392 с.
3. Слесаренко А. П. Развитие алгебро-логического метода и его приложения к многомерным нелинейным задачам теплопроводности для однородных и композитных сред: Автореф. дис.... д-ра физ.-мат. наук – М., 1984. – 36 с.
4. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П., Сафонов Н. А. Приближённый регионально-аналитический метод исследования теплопереноса в конструктивных элементах сложной



формы с учётом радиационного теплообмена // Тепломассообмен ММФ-96, Минск. – 1996. – 2. – С. 57-60.

5. Слесаренко А. П. S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм. Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Математика и кибернетика – фундаментальные и прикладные аспекты // 2012, № 1/4 (55). С. 4-10.

6. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. Сер. Математика, физика. – 1963. – 151, № 3. – С. 501-504.

7. Reinsch C. H. Smoothing by Spine Functions. Numerische Mathematik, Bd. 10. – 1967. – P. 177-183.

8. Мацевитый Ю. М., Бут Е. Н. Сплайн-идентификация теплофизических процессов. Киев. Наук. думка. 2010. – 235 с.