

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ТЕРМИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

**Веселовский В.В., Берлов А.В., Босенко Т.М.**

*Кафедра прикладной газовой динамики и тепломассообмена,  
Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск, Украина*

На основе обзора и анализа отечественной и зарубежной литературы установлено, что в настоящее время получены теоретические и экспериментальные результаты по контактному термическому сопротивлению (КТС) только для конкретных соединений и условий теплообмена [1,2]. Унифицированные математические модели, методы определения КТС отсутствуют. Поэтому разработаны три математические модели контактного теплообмена в зависимости от условий тепловых воздействий [3,4].

Основной проблемой при расчете температурных полей элементов конструкций с учетом КТС является определение его физических параметров. Характерной особенностью КТС является изменение его в широких пределах в зависимости от таких факторов, как нагрузка, сжимающая контакт, геометрические характеристики поверхности, теплофизические и механические свойства материалов контактирующих тел, свойства среды, заполняющей пространство между неровностями поверхностей. К настоящему времени выполнено значительное количество теоретических и экспериментальных работ, в которых изучалось влияние всех основных факторов на КТС.

В связи с тем, что контактный теплообмен характеризуется граничными условиями (ГУ) IV рода, их идентификация в случае не идеального контакта состоит в определении температуры контактирующих поверхностей  $T_{n1}, T_{n2}$  и теплового потока  $q_k$  через зону контакта по имеющимся данным теплофизического эксперимента, например, по температурам  $T$  контактирующих тел. Задача сводится к идентификации КТС, которое может быть определено по формуле [1]:

$$R_k = (T_{n1} - T_{n2}) / q_k .$$

Обратная задача по определению ГУ IV рода может быть решена в двух постановках: неэкстремальной и экстремальной (вариационной). В первом случае, полученные в эксперименте температуры подставляются непосредственно в обращенное решение прямой задачи. Во втором случае температура входит в целевой функционал, характеризующий степень соответствия моделируемого поля данным эксперимента. В процессе решения отыскивается минимум этого функционала. Предложенные модели построены на основе рассмотрения контактного теплообмена для двухслойной системы неограниченных пластин. Для реализации моделей требуются решения соответствующих задач нестационарной теплопроводности для составных тел. Анализ литературы [1,2] показал, что эффективным методом решения таких задач является операционный метод, основанный на интегральном преобразовании Лапласа.

Первая модель описывается системой параболических уравнений и унифицированными граничными условиями:

$$\frac{\lambda_\nu}{c_\nu} \frac{\partial^2 T_\nu(x_\nu, t)}{\partial x_\nu^2} = \frac{\partial T_\nu(x_\nu, t)}{\partial t} + w_\nu(x_\nu, t); (\nu = 1, 2). \quad (1)$$

Вторая модель описывает высокоинтенсивные, импульсные тепловые воздействия и представлена системой гиперболических уравнений. В отличие от модели 1, здесь

вводится дополнительное начальное условие и время релаксации:

$$\frac{\lambda_\nu}{c_\nu} \frac{\partial^2 T_\nu(x_\nu, t)}{\partial x_\nu^2} = \frac{\partial T_\nu(x_\nu, t)}{\partial t} + \tau_{p,\nu} \frac{\partial^2 T_\nu(x_\nu, t)}{\partial t^2} + w_\nu(x_\nu, t); \quad (\nu = 1, 2) \quad (2)$$

Третья модель включает зависимость состояния материала от смены термомеханических величин: теплового потока и внутренней энергии. Модель описывается системой интегро-дифференциальных уравнений. Кроме времени релаксации теплового потока, включены время релаксации внутренней энергии и функции релаксации:

$$\begin{aligned} & \beta_\nu(0) \frac{\partial T_\nu(x_\nu, t)}{\partial t} + \int_0^\infty \beta'_\nu(s) \frac{\partial T_\nu(x_\nu, t-s)}{\partial t} ds + c_{\varepsilon\nu} \rho_\nu \frac{\partial^2 T_\nu(x_\nu, t)}{\partial t^2} = \\ & = \alpha_\nu(0) \frac{\partial^2 T_\nu(x_\nu, t)}{\partial x_\nu^2} + \int_0^\infty \alpha'_\nu(s) \frac{\partial^2 T_\nu(x_\nu, t-s)}{\partial x_\nu^2} ds; \quad (\nu = 1, 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Для моделей 1-3 введены параметры унификации  $\alpha, h, M, K, (0; \pm 1)$ , позволяющие задавать внешние граничные условия 1, 2, 3 рода и их сочетания:

$$\begin{cases} T_\nu(x_\nu, 0) = \varphi_\nu(x) \\ \left. \frac{\partial T_\nu(x_\nu, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial \varphi_\nu(x)}{\partial x_\nu} \right|_{t=0} \sqrt{\frac{a_\nu}{\tau_{p,\nu}}} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 \lambda_1 \left. \frac{\partial T_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = h_0 \alpha_0^* \left( [f_0(t) - M_0 T_1(x_1, t)]_{x_1=0} \right) + k_0 \tau_{p,1} \frac{\partial}{\partial t} [f_0(t) - M_0 T_1(x_1, t)]_{x_1=0} \\ \alpha_1 \lambda_m \left. \frac{\partial T_m(x_m, t)}{\partial x_m} \right|_{x_m=R_m} = h_1 \alpha_1^* \left( [f_1(t) - M_1 T_m(x_m, t)]_{x_m=R_m} \right) + \\ + k_1 \tau_{p,m} \frac{\partial}{\partial t} [f_1(t) - M_1 T_m(x_m, t)]_{x_m=R_m} \end{cases} \quad (5)$$

В (1) – (5)  $\alpha_\nu(t), \beta_\nu(t)$  – функции релаксации теплового потока и внутренней энергии. Как показывают результаты экспериментальных исследований, в качестве функций релаксации могут быть приняты выражения:

$$\alpha_\nu(t) = \frac{\lambda_\nu}{\tau_{p,\nu}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{p,\nu}}\right), \beta_\nu(t) = \frac{c_\nu \rho_\nu}{\tau_{\varepsilon,\nu}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\varepsilon,\nu}}\right), \quad (6)$$

где  $\tau_{p,\nu}, \tau_{\varepsilon,\nu}$  – время релаксации теплового потока и внутренней энергии для  $\nu$ -слоя. В (1) – (5)  $x_\nu$  – локальная координата ( $0_\nu \leq x_\nu \leq R_\nu$ );  $t$  – время ( $0 \leq t \leq \infty$ );  $T_\nu(x_\nu, t)$  – температура,  $c_\nu, \rho_\nu$  – удельная теплоемкость и плотность материала  $\nu$ -слоя;  $W_\nu(x, t)$  – мощность внутренних источников (стоков) тепла.

Внутренние граничные условия рассмотрены в виде трех моделей: идеальный тепловой контакт; неидеальный тепловой контакт в виде контактного термического сопротивления, источников (стоков) тепла на стыке; неидеальный тепловой контакт в виде тепловой емкости:

$$\begin{cases} T_v(x_v, t)|_{x_v=R_v} = T_{v+1}(x_{v+1}, t)|_{x_{v+1}=a_{v+1}} \\ \lambda_v \frac{\partial T_v(x_v, t)}{\partial x_v} \Big|_{x_v=R_v} = \lambda_{v+1} \frac{\partial T_{v+1}(x_{v+1}, t)}{\partial x_{v+1}} \Big|_{x_{v+1}=a_{v+1}} - (\tau_{p,v} - \tau_{p,v+1}) \lambda_v \frac{\partial f_0}{\partial t} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \lambda_v \frac{\partial T_v(x_v, t)}{\partial x_v} \Big|_{x_v=R_v} = \frac{1}{R_{v,v+1}(t)} [T_{v+1}(0_{v+1}, t) - T_v(R_v, t)] + \tau_{p,v} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{R_{v,v+1}(t)} [T_{v+1}(0_{v+1}, t) - T_v(R_v, t)] \right) \\ \lambda_v \frac{\partial T_v(x_v, t)}{\partial x_v} \Big|_{x_v=R_v} - \lambda_{v+1} \frac{\partial T_{v+1}(x_{v+1}, t)}{\partial x_{v+1}} \Big|_{x_{v+1}=R_v} - (\tau_{p,v} - \tau_{p,v+1}) \lambda_v \frac{\partial f_0}{\partial t} = w_{v,v+1}(R_v, t), \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} T_v(x_v, t)|_{x_v=R_v} = T_{v+1}(x_{v+1}, t)|_{x_{v+1}=a_{v+1}}, \\ \lambda_v \frac{\partial T_v(x_v, t)}{\partial x_v} \Big|_{x_v=R_v} - \lambda_{v+1} \frac{\partial T_{v+1}(x_{v+1}, t)}{\partial x_{v+1}} \Big|_{x_{v+1}=a_{v+1}} - (\tau_{p,v} - \tau_{p,v+1}) \lambda_v \frac{\partial f_0}{\partial t} = q_{v+1}(x_{v+1}, T_{v+1}, t), \end{cases} \quad (9)$$

где

$$q_{v+1}(x_{v+1}, T_{v+1}, t) = c_{v,v+1} \gamma_{v,v+1} \delta_{v,v+1} \frac{\partial T_{v+1}(x_{v+1}, t)}{\partial t} \Big|_{x_{v+1}=a_{v+1}}.$$

Применим интегральное преобразование Лапласа к задаче (1) – (9) [4]:

$$\frac{d^2 T_v(x, p)}{dx^2} = \frac{Fo^r \cdot p^2 + \tau_0 \cdot p + \tau_0 \cdot p \cdot \beta'_v(p)}{\beta_v(1 + \alpha'_v(p))} \cdot T_v(x, p) + z_v(x, p), \quad (10)$$

$$\text{где } z_v(x, p) = \frac{(1 + \tau_r \cdot p)}{\beta_v(1 + \alpha'_v(p))} [-\varphi_v(x) - p \cdot \varphi_v(x) - \beta_v^*(p) \cdot p - w_v(x, p)]. \quad (11)$$

Решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения (7) представим в виде:

$$\begin{aligned} T_v(x, p) = & C_v \cdot ch \left( \sqrt{\frac{Fo^r \cdot p^2 + \tau_0 \cdot p + \tau_0 \cdot p \cdot \beta'_v(p)}{\beta_v(1 + \alpha'_v(p))}} \cdot x \right) + \\ & + D_v \cdot sh \left( \sqrt{\frac{Fo^r \cdot p^2 + \tau_0 \cdot p + \tau_0 \cdot p \cdot \beta'_v(p)}{\beta_v(1 + \alpha'_v(p))}} \cdot x \right) + z_v^*(x, p), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $z_v^*(x, p)$  – частное решение (10);  $C_v, D_v$  – константы интегрирования, которые определяются из унифицированных внешних и внутренних граничных условий (4), (5), (7) – (9) записанных в поле изображений.

Как правило, окончательно решение в поле изображений для большинства задач нестационарной теплопроводности состоит из слагаемых типа

$$T(\mu, \varphi, p) = \overline{g(p)} w(\mu, \varphi, p),$$

где функции  $w(\mu, \varphi, p)$  – некоторые трансцендентные мероморфные функции, имеющие бесконечное множество простых полюсов,  $\overline{g(p)}$  – изображение граничных функций [3-6]. Если зависимость от времени граничных функций  $g(\tau)$  конкретизирована, то после решения задачи в изображениях обратное преобразование производится по формуле обращения Римана-Меллина и решение записывается в виде суммы вычетов по полюсам функции  $w(\mu, \varphi, p)$  и особым точкам функции  $\overline{g(p)}$ . В общем же случае, при решении задач нестационарной теплопроводности с

нестационарными граничными условиями, используется теорема Дюамеля. Однако известно, что этот классический метод имеет следующие недостатки [4]: 1) требует решения вспомогательной задачи с постоянными граничными условиями; 2) решение получается в виде рядов, которые нуждаются в дальнейшей доработке; 3) во многих случаях не получают эффективного решения, так как оно представляет собой некоторый интеграл, окончательно решить который затруднительно. Применение структурного метода при решении задач нестационарной теплопроводности позволяет в некоторой мере избежать этих недостатков [4-6].

В предположении бесконечной дифференцируемости по координате  $x$  функции  $z_v^*(x, p)$  представим ее в виде бесконечного ряда по производным от  $z_v(x, p)$ :

$$z_v^*(x, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta_v(p) + \alpha_v^*(p))^n}{p^{n+1} (\tau_0 + Fo^r \cdot p + \beta_v^*(p))^{n+1}} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} z_v(x, p) + Fo^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta_v(p) + \alpha_v^*(p))^n}{p^n (\tau_0 + Fo^r \cdot p + \beta_v^*(p))^n} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} z_v(x, p). \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что (13) удовлетворяет (7) и является его частным решением. Представление  $z_v^*(x, p)$  в таком виде, хотя и сужает класс функций до бесконечно дифференцируемых, однако, является удобным для дальнейшего анализа.

Для определения оригинала изображения  $z_v^*(x, p)$  воспользуемся теоремой о свертке функции. Причем, учитывая наши предположения о классе функций  $\varphi_v(x)$ ,  $w_v(x, Fo)$ , и предполагая абсолютную сходимость ряда (13), применим теорему о свертке функций к каждому слагаемому ряда. Тогда получим:

$$z_v^*(x, Fo) = z_v^{*,nap}(x, Fo) + z_v^{*,zun}(x, Fo) + z_v^{*,nam}(x, Fo). \quad (14)$$

Для получения оригинала выражения (13), используя формулы разложения степенных функций, получим:

$$\frac{(\beta_v + \alpha_v^*)^n}{\tau_{0,v}} \frac{1}{p^{n+1} (\tau_{0,v} + Fo^r \cdot p + \beta_v^*)^{n+1}} \approx \frac{(\beta_v + \alpha_v^*)^n}{\tau_{0,v}} \frac{1}{p^{n+1} \left( 1 + \frac{Fo^r}{\tau_{0,v}} p + \frac{\beta_v^*}{\tau_{0,v}} + n \left( \frac{Fo^r}{\tau_{0,v}} p + \frac{\beta_v^*}{\tau_{0,v}} \right) \right)}. \quad (15)$$

Аналогично разложение функции (15) по степеням, относительно  $p$ :

$$\left( 1 + \frac{Fo^{r,v}}{\tau_{0,v}} p + \frac{\beta_v^*}{\tau_{0,v}} \right)^{n+1} \approx 1 + (4 + 3n) \cdot \left( \frac{Fo^{r,v}}{\tau_{0,v}} p \right) + (2 + n) \left( \frac{Fo^{e,v} \cdot \beta_v^*}{\tau_{0,v}} \right). \quad (16)$$

Подставим (16) в (15), тем самым преобразовывая дробную составляющую частного решения:

$$\frac{(\beta_v + \alpha_v^*)^n}{\tau_{0,v}} \frac{1}{p^{n+1} \left( 1 + (n+2) \left( \frac{Fo^{r,v}}{\tau_{0,v}} p \right) + (n+2) \left( \frac{Fo^{e,v} \cdot \beta_v^*}{\tau_{0,v}} \right) \right)^{n+1}} = \frac{(\beta_v + \alpha_v^*)^n}{\tau_{0,v}} \frac{1}{p^{n+1}} - (n+2) \left( \frac{Fo^{r,v}}{\tau_{0,v}^2} \right) \left( \frac{(\beta_v + \alpha_v^*)^n}{p^n} \right) - (n+2) \left( \frac{Fo^{e,v} \cdot \beta_v^*}{\tau_{0,v}^2} \right) \left( \frac{(\beta_v + \alpha_v^*)^n}{p^n} \right). \quad (17)$$

Таким образом, получим частное решение (14), в котором:

$$\begin{aligned}
 z_v^{*,nap}(x, Fo) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \beta_v^n \frac{Fo^n}{n!} \varphi_v^{(2n)}(x) - \beta_v^* \sum_{n=0}^{\infty} \beta_v^n \frac{1}{n!} \int_0^{Fo} (Fo - \theta)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} w_v(x, \theta) d\theta, \\
 z_v^{*,zun}(x, Fo) &= Fo^{r,v} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_v^n \frac{(n+2)Fo^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_v^{(2n)}(x) + \beta_v^* Fo^{r,v} \times \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \beta_v^n \frac{n}{(n-1)!} \int_0^{Fo} (Fo - \theta)^{n-1} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} w_v(x, \theta) d\theta, \\
 z_v^{*,nam}(x, Fo) &= Fo^{e,v} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_v^n \frac{(n+2)Fo^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_v^{(2n)}(x) + \beta_v^* Fo^{e,v} \times \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \beta_v^n \frac{n}{(n-1)!} \int_0^{Fo} (Fo - \theta)^{n-1} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} w_v(x, \theta) d\theta.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Решение задачи (1) – (9) представим в виде суммы частных решений (принцип суперпозиции), которые формируются под влиянием следующих компонент воздействия: внешних граничных условий, условий на стыке пластин, источников тепла по сечению каждой пластины, начального распределения температуры и взаимного теплового влияния пластин [4-6]:

$$\begin{aligned}
 T_v(x, Fo) &= \sum_{r=1}^{2m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n [\mu_{n,r}^v(x), \varphi_n] g_r^n(Fo) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_r(p_k)}{\Psi'(\varphi_n, p_k)} \times \right. \\
 &\times Q[\mu_{n,r}^v(x), p_k] \exp(-\gamma^2 Fo) \left. \right\} + z_v^*(x, Fo),
 \end{aligned} \tag{19}$$

где  $g_r^n(Fo)$  – компоненты воздействия;

$$\Omega_n [\mu_{n,r}^v(x), \varphi_n] = \frac{\mu_{n,r}^v(x)}{\varphi_0} - \sum_{j=1}^n \Omega_{n-j} [\mu_{n-j,r}^v(x), \varphi_{n-j}] \frac{\varphi_j}{\varphi_0} - \text{рекуррентное соотношение,}$$

функциональные комплексы  $\mu_{n,r}^v(x, \overline{Fo})$ ,  $\varphi_n$  отвечают представлению мероморфных функций решения задачи в поле изображений

$$\overline{T}_v(x, P) = \sum_{r=1}^{2m} \overline{g}_r(P) W_{r,v}(x, \overline{Fo}, P) + \overline{Z}_v^*(x, \overline{Fo}, P), \tag{20}$$

$$\text{где } W_{r,v}(x, \overline{Fo}, p) = \frac{Q(x, p)}{\Psi(p)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n,r}^v(x, \overline{Fo}) P^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n P^n}; \quad \Psi(\varphi_n, p_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cdot p_k^n; \quad p_k = -\gamma_k^2 \frac{a_0}{R_0^2}; \quad \gamma_k -$$

корни трансцендентного уравнения;

$$\Psi(\varphi_n, \gamma) = 0. \tag{21}$$

Для расчета температурного поля  $m$  – слойного тела с условиями (1) – (9) необходимо, используя рекуррентные соотношения вычислить функциональные комплексы  $\mu_{n,r}^v(x, \overline{Fo})$ ,  $\varphi_n$ ,  $P_k$ :

$$\mu_{n,r}^v(x, Fo) = [\mu_{n,r}^v(x)]_{\text{нараб}} + [\mu_{n,r}^v(x, \overline{Fo}_v)]_{\text{зунер}} + [\mu_{n,r}^v(x, \overline{Fo}_v)]_{\text{инт.-диф}}. \tag{22}$$

$$\varphi_n = [\varphi_n]_{\text{нараб}} + [\varphi_n(\overline{Fo}_v)]_{\text{зунер}} + [\varphi_n(\overline{Fo}_v)]_{\text{инт.-диф}}. \tag{23}$$

Проведенные исследования асимптотических свойств решений (16) показали, что для последовательностей  $[\mu_{n,r}^v]_{\text{зунер}}$ ,  $[\varphi_n]_{\text{зунер}}$ ,  $[\mu_{n,r}^v]_{\text{инт.-диф}}$ ,  $[\varphi_n]_{\text{инт.-диф}}$  достаточно ограничиться двумя членами, содержащими время релаксации теплового потока и

внутренней энергии, в отличие от последовательностей  $[\mu_{n,r}^v]_{n \text{ параб}}$ ,  $[\varphi_n]_{n \text{ параб}}$  - количество членов которых определяется порядком производных от компонент воздействий в решении (19).

Вычисление составных комплексов  $\Omega_n[\mu_{n,r}^v(x, \overline{Fo})]$ ,  $Q[\mu_{n,r}^v(x, \overline{Fo}), p_k]$ ,  $\Psi(\varphi_n, p_k)$  осуществляется по рекуррентным формулам [4-6]. Корни параметрического трансцендентного уравнения (21) находятся асимптотическим методом или по приближенным формулам [4].

Компоненты воздействия  $g_r(Fo, \overline{Fo})$ , характеризуют влияние неравномерного начального распределения температуры, распределение источников (стоков) тепла по сечению, параметры КТС и учитывают релаксации теплового потока и внутренней энергии.

При  $r = 3, 4, 5, \dots, m+1$ :  $g_r(Fo, \overline{Fo}) = V_{i,i+1}(Fo, \overline{Fo})$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$ ) – компоненты воздействия, сформированные за счет неидеального теплового контакта на стыках слоев, имеющие в поле изображения вид:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{v-1,v}(p, \overline{Fo}) &= \bar{Z}_{v-1}^*(1, p, \overline{Fo}) - \bar{Z}_v^*(1, p, \overline{Fo}) + \frac{1}{R_{v-1,v}} \bar{Z}_{v-1}^*(1, p, \overline{Fo}), \\ \bar{V}_{v-1,v}^*(p, \overline{Fo}) &= \mu_{v,v-1} \{ \bar{Z}_{v-1}^*(1, p, \overline{Fo}) - \mu_{v,v-1} \bar{Z}_v^*(1, p, \overline{Fo}) - w_{v-1,v}^*(1, p) - \\ &- A_{v-1,v} [p \bar{Z}_{v-1}^*(1, p, \overline{Fo}) - \varphi_v(0)] \}. \end{aligned} \quad (24)$$

При  $r = 1$ :  $g_1(Fo, \overline{Fo}) = -h_0 Bi_0 f_0(Fo) + h_0 Bi_0 M_0 \bar{V}_{0,1}(Fo, \overline{Fo}) + \alpha_0 V_{0,1}^*(Fo, \overline{Fo})$  – компонента воздействия, сформированная за счет граничных условий (5) и функций  $V_{v,v-1}, V_{v,v-1}^*$ , вычисленных на внешней границе системы ( $v = 1$ ). Анализ показывает, что  $V_{0,1}(Fo, \overline{Fo}), V_{0,1}^*(Fo, \overline{Fo})$  не зависят от вида неидеального теплового контакта, а определяются только функцией  $Z_v^*(x, \overline{Fo}, Fo)$  и ее производной по  $x$ , вычисленных при  $x = 0$ .

При  $r = 2$ :  $g_2(Fo, \overline{Fo}) = h_1 Bi_1 f_1(Fo) - h_1 Bi_1 M_1 V_{m,m+1}(Fo, \overline{Fo}) - \alpha_1 V_{m,m+1}^*(Fo, \overline{Fo})$  – компонента воздействия, сформированная за счет граничных условий (5), вычисленных на внешней границе системы ( $v = m$ ). Анализ показывает, что  $V_{m,m+1}(Fo, \overline{Fo}), V_{m,m+1}^*(Fo, \overline{Fo})$  не зависят от вида неидеального теплового контакта, а определяются только функцией  $Z_v^*(x, \overline{Fo}, Fo)$  и ее производной по  $x$ , вычисленных при  $x = 1$ .

Определение компонент воздействия и вычисление, соответствующих им, простейших структур решения (19) выполняются по соотношениям (20) – (24). Решение (19) позволяет определить температурное поле многослойной системы пластин с неидеальным тепловым контактом в различной физической реализации, источниками тепла, неравномерным начальным распределением температур. Переход от моделей 1, 2, 3 осуществляется дополнительным включением в решение составляющих с множителями  $\tau_p, \tau_\varphi$ .

При решении нелинейных задач теплопроводности первого рода, т.е. с учетом зависимостей теплофизических материалов слоев от температуры применяется метод последовательных интервалов [5]. Решение (19) в этом случае имеет вид:

$$T_{v,j}(x, Fo) = \sum_{r=1}^{2m} \left\{ \Omega_{n,j} [\mu_{n,r}^v(x, \overline{Fo}), \varphi_n] g_{r,j}^{(n)}(Fo, \overline{Fo}) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{g}_{r,j}(p_k)}{\Psi'(\varphi_n, p_k)} \cdot Q_j [\mu_{n,r}^v(x, \overline{Fo}), p_k] \exp(-\gamma_k^2 Fo) \right\} + Z_{v,j}^*(x, \overline{Fo}, Fo). \quad (25)$$

Отличие решения (25) от решения (19) заключается в необходимости вычисления на каждом временном интервале разбиения  $\Delta Fo_j$  ( $0_j \leq Fo \leq \Delta Fo_j$ ) компонент воздействий  $g_{r,j}(\overline{Fo}, Fo)$ , составных комплексов  $\Omega_{n,j}$ ,  $Q_j$  и функций  $Z_{v,j}^*(x, \overline{Fo}, Fo)$ .

Сравнение температурных полей для составных тел, полученных структурным и численным методами приведено в [4]. Тестовые примеры для гиперболического уравнения теплопроводности выполнены для неограниченной пластины. Численные результаты решения, полученные с использованием функций Грина согласуются со структурным решением.

Обработку теплофизического эксперимента с целью определения КТС можно проводить различными методами: методом аналитического продолжения с применением сглаживания регуляризованными сплайнами, итерационными методами с минимизацией невязки между расчетной и экспериментальными температурами, градиентными методами с минимизацией квадратичного функционала [1,2]. В основу каждого метода положено использование решений (19), (25).

Покажем, что решения прямых задач теплопроводности для многослойных пластин можно использовать и для определения КТС. Пусть, например, необходимо определить КТС на стыке  $\nu$ -ой и  $\nu+1$ -ой пластин.

При решении ОЗТ, необходимых для решения задачи по определению КТС на стыке  $\nu$ -ой и  $\nu+1$ -ой пластины, будем предполагать: процесс переноса тепла в  $\nu$ -х слоях системы осуществляется чисто кондуктивным путем; интенсивность источников тепла  $W_\nu(x, \tau)$  распределены равномерно по координате и времени; внешние условия теплообмена соответствуют (5); условия сопряжения  $k$ -х слоев ( $k \neq \nu, \nu+1$ ); математическая формулировка задачи в целом имеет вид (1) – (9). Дополнительные условия необходимые для определения КТС, зададим в виде изменения температуры в двух точках системы по сечениям  $k$ -ой и  $n$ -ой пластин, т.е.

$$T_k(x, \tau) \Big|_{x=x_k^*} = f_k^*(\tau), 0 \leq x_k^* \leq R_k, \\ T_\nu(x, \tau) \Big|_{x=x_\nu^*} = f_\nu^*(\tau), 0 \leq x_\nu^* \leq R_\nu, \\ T_\nu(x, \tau) \Big|_{x=x_k^*} = f_k^*(\tau), 0 \leq x_k^* \leq R_k,$$

где  $f_\nu^*(\tau)$ ,  $f_k^*(\tau)$  – функции времени, известные из эксперимента с заданной погрешностью  $\delta(\tau)$ . Если дополнительные условия заданы в одной точке, то предполагаются заданными граничные условия на одной из внешних поверхностей. В зависимости от расположения датчиков температур по сечению системы плоских тел (далеко удалены от внешних поверхностей, расположены близко) будем использовать для решения граничных ОЗТ метод экстраполяции или метод наименьших квадратов [4-6].

Пусть в некоторой точке  $x = x_\nu^*$  ( $0 \leq x_\nu^* \leq 1$ ) изменение температуры задано функцией времени  $f_\nu^*(\tau)$ , известно из эксперимента. Кроме того, пусть будут заданы условия теплообмена на одной из поверхностей и условия неидеального теплового контакта на стыке слоев в различной физической реализации. Требуется найти условия

теплообмена (температуру, тепловой поток) на другой внешней поверхности.

Решение этой задачи методом экстраполяции будет заключаться в следующем.

Выделим из области  $D_m = \sum_{k=1}^m R_k$  подобласть  $D_{m,v} = \sum_{k=1}^{\nu=m_v} R_k \in D_m$ , включающую систему пластин, ограниченную внешней границей, заданными граничными условиями и слоем, в котором находится датчик температуры. Решение задачи теплопроводности для области  $D_{m,v}$ , приняв  $f_v^*(Fo)$  за граничные условия I – го рода, с учетом введенных предположений соответствует решению прямых задач (19), (25). Для построения алгоритма решения граничной ОЗТ решение прямой линейной задачи теплопроводности (1) – (9) для области  $D_m$  преобразуем к виду

$$T_n(x, \tau) \Big|_{x=x_n^*} = f_n^*(\tau), \quad 0 \leq x_n^* \leq R_n \quad k=1,2,3,\dots,m; \quad n=1,2,3,\dots,m,$$

где  $f_k^*(\tau)$ ,  $f_n^*(\tau)$  – функции времени, известные из эксперимента с заданными погрешностями.

Выделим характерные области и введем следующие определения. Область, включающую число слоев системы, лежащих ниже стыка  $\nu$ -ой и  $\nu+1$ -ой пластин обозначим через  $m_n$ , а систему  $m_n$  – назовем подсистемой I. Область, включающую число слоев системы, лежащих выше стыка  $\nu$ -ой и  $\nu+1$ -ой пластин обозначим через  $m_e$ , а систему  $m_e$  – назовем подсистемой II. Отсюда следует, что индекс  $k$  – характеризует подсистему I ( $k=1,2,\dots,\nu$ ), индекс  $n$  – подсистему II ( $n=1,2,\dots,m$ ).

Тогда КТС определяется по формулам:

$$\begin{cases} R_{\nu,\nu+1}(\tau) = \frac{[T_{\nu+1}(0, \tau) - T_\nu(R_\nu, \tau)]}{\lambda_\nu \frac{\partial T_\nu(x_\nu, \tau)}{\partial x_\nu} \Big|_{x_\nu=R_\nu}} \\ W_{\nu,\nu+1}(\tau) = \lambda_\nu \frac{\partial T_\nu(x_\nu, \tau)}{\partial x_\nu} \Big|_{x_\nu=R_\nu} - \lambda_{\nu+1} \frac{\partial T_{\nu+1}(x_{\nu+1}, \tau)}{\partial x_{\nu+1}} \Big|_{x_{\nu+1}=0_{\nu+1}}, \end{cases} \quad (26)$$

$$q_{\nu+1}(\tau) = \lambda_\nu \frac{\partial T_\nu(x_\nu, \tau)}{\partial x_\nu} \Big|_{x_\nu=R_\nu} - \lambda_{\nu+1} \frac{\partial T_{\nu+1}(x_{\nu+1}, \tau)}{\partial x_{\nu+1}} \equiv c_{\nu,\nu+1} \delta_{\nu,\nu+1} \frac{\partial T_{\nu+1}(x_{\nu+1}, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x_{\nu+1}=0_{\nu+1}} \quad (27)$$

соответствующим различным условием неидеального теплового контакта.

Из (26), (27) следует, что для определения контактных термодинамических функций

$$R_{\nu,\nu+1}(\tau), \quad W_{\nu,\nu+1}(\tau), \quad q_{\nu,\nu+1}(\tau) \quad (28)$$

необходимо знать количество подводимого к контакту тепла из подсистем I, II, а также изменения температуры на внутренних поверхностях соприкосновения подсистем, т.е. изменение во времени следующих функций:

$$\begin{cases} T_{w,1}(Fo) = T_\nu(x, Fo) \Big|_{x=1} \\ q_{w,1}(Fo) = \frac{\partial T_\nu(x, Fo)}{\partial x} \Big|_{x=1} \end{cases}, \quad (29)$$

$$\begin{cases} T_{w,2}(Fo) = T_{\nu+1}(x, Fo) \Big|_{x=0} \\ q_{w,2}(Fo) = \frac{\partial T_{\nu+1}(x, Fo)}{\partial x} \Big|_{x=0} \end{cases}, \quad (30)$$

Функции (29), (30) могут быть найдены из решения граничных ОЗТ соответственно для подсистемы I и подсистемы II. Поэтому необходимым условием определения КТС является размещение датчиков температур в точках, принадлежащих



соответственно подсистемам I, II. В зависимости от расположения датчиков температур по сечениям подсистем многослойных плоских тел (далеко удалены от стыка  $\nu$  и  $\nu+1$ -ой пластин, расположены близко) для определения КТС целесообразно использовать метод экстраполяции или метод наименьших квадратов.

Решение обратной задачи теплопроводности по определению КТС методом экстраполяции будет заключаться в следующем. Выделим из области  $D_{m_n} = \sum_{\nu=1}^{m_1} R_{\nu}$

подобласть  $D_{m_k} = \sum_{\nu=1}^{k=m_k} R_{\nu} \in D_{m_n}$ , включающую систему пластин, ограниченной внешней границей (первая пластина системы) с заданными граничными условиями и слоем, в

котором находится датчик температуры. Из области  $D_{m_g} = \sum_{k=1}^{m_g} R_k$  выделим подобласть

$D_{m_n} = \sum_{k=m}^{m_g} R_k \in D_{m_g}$ , ограниченную внешней поверхностью и слоем, в котором

находится датчик температуры. Решения задач теплопроводности для областей  $D_{m_k}, D_{m_n}$ , приняв  $f_k^*(\tau)$  и  $f_n^*(\tau)$  за граничные условия I – го рода с учетом введенных предположений, соответствуют решению прямых задач теплопроводности. Алгоритмы решения граничных ОЗТ по определению граничных условий (29), (30) основаны на аналитическом продолжении решения и поэтому этот подход целесообразно использовать тогда, когда датчики температур расположены по сечениям  $\nu$ -ой и  $\nu+1$ -ой пластин. Если датчики температур удалены вглубь подсистем пластин I, II, то в этом случае для определения граничных условий (9), (10) целесообразно использовать метод наименьших квадратов [5,6]. Следовательно, из решений граничных ОЗТ для подсистем I, II найдем значения функций (29), (30). Подставляя их значения в условия неидеального теплового контакта (26), (27), найдем значения контактных термодинамических функций (28), что и требовалось.

Одной из актуальных задач является изучение путей изменения КТС в желаемом направлении. В связи с этим были выполнены работы [4-6], в которых исследовались контакты с покрытиями и прокладками из мягких металлов, позволяющих управлять КТС. Требуется найти неизвестную функцию  $R_{1,2}(\tau)$  на решениях СОДУ при условии, что выбранная некоторым образом  $R_{1,2}(\tau)$  доставляет минимум функционалу

$$J(R_{1,2}) = \int_0^{\tau_k} [T_1(R_{1,2}, x_{1,0}, \tau) - f_3(\tau)]^2 d\tau \rightarrow \min. \quad (31)$$

Величина  $J(R_{1,2})$  представляет собой функционал в пространстве функций  $R_{1,2}(\tau)$  и его числовое значение определяет расстояние в функциональном пространстве  $L_2$  между заданной  $f_3(\tau)$  и расчетной  $T_1(R_{1,2}, x_{1,2}, \tau)$  температурами. Зная градиент целевого функционала (31), построим итерационный алгоритм решения ОЗТ, воспользовавшись методом сопряженных градиентов [1]:

$$R_{1,2}^{\nu+1} = R_{1,2}^{\nu} + \alpha_{\nu} \Gamma^{\nu}, \quad \nu=0,1,\dots, \quad (32)$$

$$\Gamma^{\nu} = \int_0^{\tau} P^{\nu}(\tau) d\tau, \quad P^{\nu}(\tau) = -J'_{\nu} + \beta_{\nu} P^{\nu-1}(\tau), \quad \beta_0=0, \quad \beta_{\nu} = \frac{\int_0^{\tau_k} (J'_{\nu} - J'_{\nu-1}) J'_{\nu} d\tau}{\int_0^{\tau_k} (J'_{\nu-1})^2 d\tau}.$$

Итерационный процесс строится следующим образом. Задается начальное приближение для параметров искомого функции  $R_{1,2}(\tau)$  и решается прямая задача теплопроводности аналогично алгоритму, изложенному выше. По рассчитанному полю температур после решения сопряженной задачи вычисляется градиент целевого функционала. Из соотношений (32) находится новое приближение, после чего процесс повторяется. Выход из итерационного процесса целесообразно осуществить по невязке.

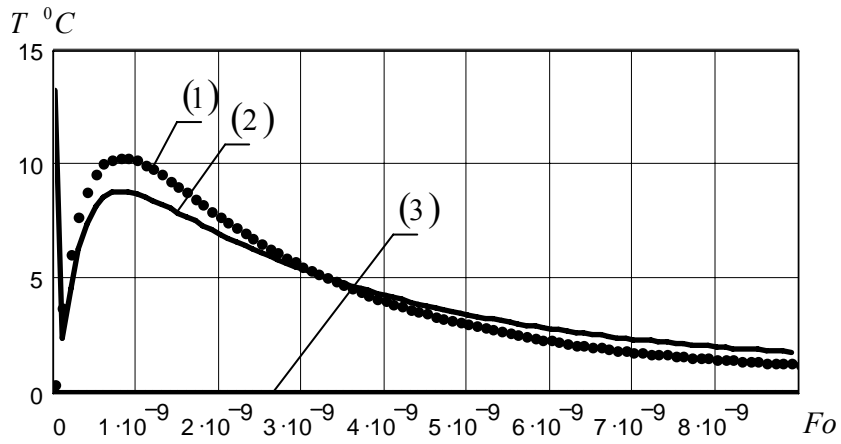


Рис. 1. Температурное поле двухслойной пластины:  
материал графит АРВ-У на глубине проникновения  
 $L = 10^{-4}$  м при  $T_c = 500^{\circ}C$

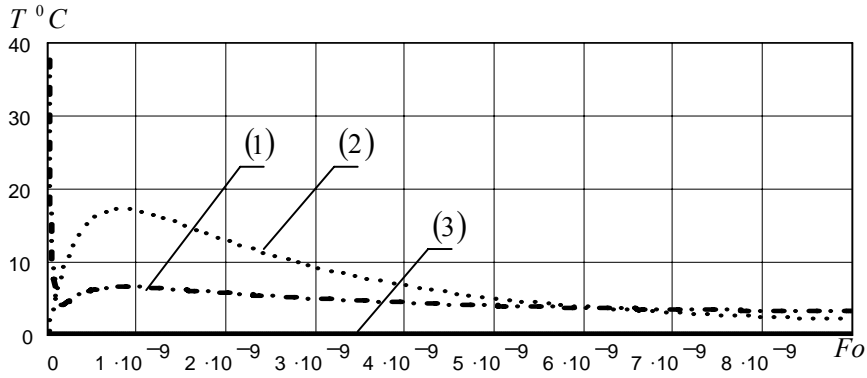


Рис. 2. Температурное поле двухслойной пластины:  
материал сталь, глубина проникновения  
 $L = 10^{-4}$  м при  $T_c = 500^{\circ}C$

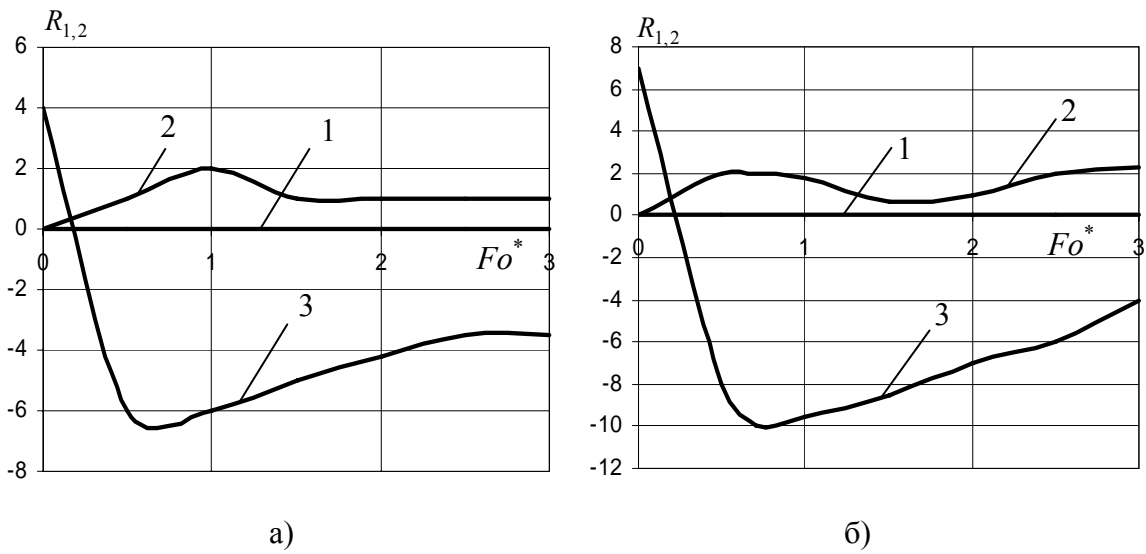


Рис.3. Контактное термическое сопротивление ( $Fo^* = Fo \cdot 10^{-9}$ ) при: а)  $T_{cp} = 1000^{\circ}C$ ; б)  $T_{cp} = 2000^{\circ}C$ .

В качестве примера рассмотрена задача о нагреве составной конструкции в виде системы двух неограниченных пластин (графит АРВ-У – сталь-15). На внешней границе составной конструкции заданы граничные условия первого рода; на стыке слоев – условия идеального теплового контакта, а внутренняя граница теплоизолирована. Геометрические и теплофизические параметры принимаются следующие:  $R_1 = R_2 = 30 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $a_1 = 0.028 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $a_2 = 0.0692 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\tau_r^1 = \tau_r^2 = 10^{-9} \text{ с}$ ,  $\tau_e^1 = \tau_e^2 = 10^{-11} \text{ с}$ .

Расчеты проведены для граничной температуры 500 – 1500 °С. Температуры, соответствующие решениям систем интегро-дифференциальных, гиперболических и параболических уравнений обозначены линиями и, соответственно цифрами 1, 2, 3. При увеличении интервала расчета отличия между решениями уравнений совпадают с определенной точностью. Результаты расчетов показаны на рис.1, 2.

Проведены параметрические исследования КТС для моделей 1-3. На рис.3 кривые 1-3 соответствуют моделям 1-3. Установлены зависимости температурного перепада на поверхностях контакта при использовании решения задач контактного теплообмена для моделей в виде систем гиперболических и интегро-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим двухслойную систему пластин с неидеальным тепловым контактом в виде термически тонкого слоя на стыке пластин. Предположим, что на внешних поверхностях заданы условия первого и второго рода ( $h_0 = 0, \alpha_1 = 0, h_1 = M_1 = 1$ ). Теплофизические, геометрические характеристики и условия теплообмена принимают значения:

$$R_1 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}, R_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, R_0 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}, a_1 = 0,30864 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с},$$

$$a_2 = 0,6945 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}, \lambda_2 = 93,04 \text{ Вт}/\text{м} \cdot \text{К}, \lambda_3 = 116,30 \text{ Вт}/\text{м} \cdot \text{К},$$

$$f_1(F_o) = 0,0025 \cdot F_o + 0,0075 \cdot F_o^3 - 0,00025 \cdot F_o^4.$$

Из решения прямой задачи теплопроводности было найдено изменение температуры в точках  $x_v = 0,5$ . Определение КТС обычно связано с регистрацией экспериментальной температуры в определенных точках системы двухслойных пластин. Предположим, что экспериментальная температура  $f_v^*(Fo)$  замерялась в точках  $x_v = 0,5$ . Тогда температурное поле для областей  $\in [0, x_v^*]$  можно определить из решения прямой задачи теплопроводности для пластины при заданном ГУ на внешней поверхности и температурой  $f_v^*(Fo)$ , принимаемой за второе ГУ. Очевидно, температура  $f_v^*(Fo)$ , принимаемая за граничную функцию, сложилась во времени однозначно, относительно внешних условий, условий на контакте слоев и всей области. Тогда наличие в найденном решении прямой задачи для области  $\in [0, x_v^*]$  функции  $f_v^*(Fo)$ , в которой неявно отражена вся область, позволяет предположить, что полученное решение можно аналитически продолжить на область  $\in [x_v^*, 1]$ .

На рис.4 приведены значения функции  $f_2(Fo)$ , задаваемые при решении прямой задачи теплопроводности (сплошная линия) и вычисленная из решения ОЗТ. Исходная функция  $f_v^*(Fo)$  возмущалась по закону  $f_v^*(Fo) = \bar{f}_v^*(Fo)(1 + n_j \varepsilon)$  ( $\bar{f}_v^*(Fo)$  – детерминированная температура,  $n_j$  – случайное число, вырабатываемое датчиком случайных чисел с нормальным законом распределения,  $\varepsilon$  – вносимое возмущение).

На рисунке точками обозначены вычисленные значения функции  $f_2(Fo)$  при  $\varepsilon = 0$  ( без регуляризации  $\bar{f}_v^*(Fo)$ ), кружками при  $\varepsilon = 5\%$ , треугольниками – при  $\varepsilon = 10\%$ . Подставив в (9) тепловой

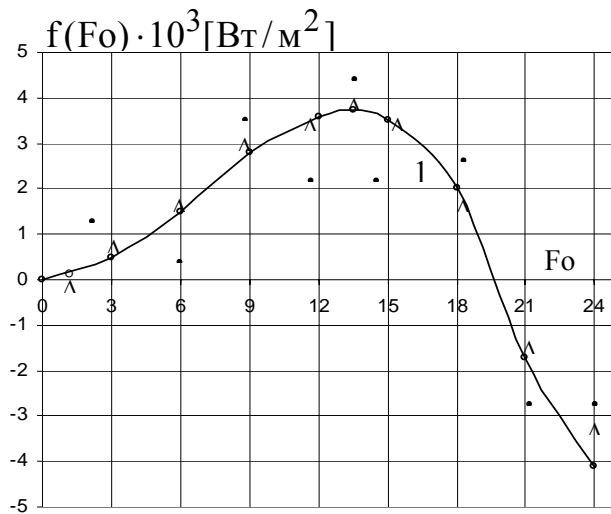


Рис.4. Восстановление КТС (кривая 1 – восстановление КТС; точки – решение без регуляризации, кружочки – ошибки в экспериментальной температуре  $\varepsilon = 5\%$ , треугольники –  $\varepsilon = 10\%$ ).

поток  $f_2(Fo)$  и производную от температуры поверхности по времени, можно определить параметры термически тонкого слоя между пластинами.

В целом изучение состояние вопроса позволяет сделать вывод, что, несмотря на значительный объем выполненных работ, позволивших получить ценные в научном и практическом отношении результаты, ряд важных вопросов контактного теплообмена требует дальнейшего исследования, поскольку специфические особенности материалов контактирующей пары или условий работы контактов часто не позволяют воспользоваться предложенными в известных публикациях зависимостями. В

данной работе разработаны математические модели контактного теплообмена, учитывающие условия внешнего теплообмена: высокотемпературные тепловые воздействия, импульсные тепловые воздействия, длительность импульсов, условия внутреннего теплообмена в виде неидеального теплового контакта в различной физической реализации.

### Литература

- [1] Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности: В 2-х т. -К.: Наук. думка, 2003.-1.-460 с.;2.-392 с.
- [2] Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена.– М.: Машиностроение, 1988.– 280 с.
- [3] Веселовский В.В. Математические модели и определение контактного термического сопротивления в элементах конструкций // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дн.: ДНУ, 2006. – С.88-95.
- [4] Веселовский В.В. Решение задач контактного теплообмена структурным методом // Металлургическая теплотехника: Сб. науч. тр. НМетАУ. – Дн.: Пороги, 2007. – С.62-70.
- [5] Сяев В.А., Веселовский В.В. Определение контактных термических сопротивлений в элементах конструкций // Металлургическая теплотехника: Сб. научн. трудов НМетАУ. – Днепропетровск: Пороги, 2004. – Т. 10. – С. 257 – 265.
- [6] Сяев В.А., Веселовский В.В. Определение граничных условий контактного теплообмена // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дн: ДНУ, 2005. – С.99-107.